

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ СИСТЕМИ РАКЕТА-КОНТЕЙНЕР ПІД ЧАС МІНОМЕТНОГО СТАРТУ

*Розроблена математична модель мінометного старту ракети з транспортно-пускового контейнера. Рух в системі "ракета - контейнер" розподілено в часі на три ділянки. Перша – ділянка відносного поступального руху ракети в контейнері. Друга – ділянка відносного складного руху ракети в контейнері. Третя – ділянка руху контейнера після повної втрати ракетою механічного контакту з контейнером, що являє собою вільні затухаючі коливання. Модель становить систему диференціальних рівнянь взаємопов'язаних рухів складових частин системи літальний апарат-пускова установка відносно параметрів, що визначають ці рухи.*

**Ключові слова:** мінометний старт, динаміка старту, система диференціальних рівнянь.

### Вступ

Дана робота присвячена дослідженню процесу старту літального апарату (ЛА) з мобільної пускової установки (ПУ).

Дослідження динаміки старту необхідні для визначення початкових збурень, які отримує ЛА в момент втрати контакту з ПУ, а також динамічних навантажень на корпус ЛА під час старту. Не менш важливою задачею є визначення навантажень на ПУ під час старту. Вона передбачає визначення динамічних зусиль, виникаючих в елементах конструкції ПУ, з наступним можливим визначення динамічних напружень та деформацій елементів конструкції.

Основним джерелом інформації на стадії конструкторської розробки, зокрема про динамічні навантаження під час старту, є розрахункові дослідження. Теоретичною основою для таких досліджень може бути тільки математична модель. Модель, як правило, являє систему диференціальних рівнянь руху складових частин системи ЛА-ПУ під час старту з урахуванням їх інерційних властивостей, пружних і демпфуючих властивостей внутрішніх зв'язків ПУ та ґрунтової основи, що доповнюється необхідними алгебраїчними рівняннями існуючих в системі внутрішніх зв'язків.

Одною із сучасних систем старту є клас контейнерних установок, що розміщуються на рухливих носіях, в яких запроваджено мінометний старт [2, 4-6].

Об'єктом дослідження в даній роботі є процес старту ракети з контейнера, який вільно спирається

на ґрунт. Контейнер і ракета, що входять до складу мобільної ПУ, розглядаються окремо від носія. Ґрунт, на який спирається контейнер, вважається пружним і демпфуючим суцільним середовищем. Рух ракети відбувається за рахунок підвищення тиску в контейнері пороховим акумулятором тиску (ПАТ).

Необхідність в створенні окремої моделі руху ракета-контейнер без розгляду зв'язку контейнера з носієм ПУ визначається складністю повної моделі руху системи носій-контейнер-ракета. Внаслідок цього конструкція ПУ ділиться на два модулі, один з яких включає контейнер і ракету, а другий – носій. Обмеження кількості тіл, що входять до розрахункової моделі, ракетою і контейнером, дозволяє за допомогою чисельного розв'язання спрощеної математичної моделі дослідити та відпрацювати механізм взаємодії контейнера з ґрунтом і ракети з контейнером, оцінити адекватність впливу пружно-демпфуючих характеристик ґрунту, інерційних характеристик ракети і контейнера, а також динаміки тиску, створюваного ПАТом на поведінку ракети та контейнера. В подальшому передбачається додати до розрахункової моделі носій, а математичну модель доповнити рівняннями руху його складових частин та рівняннями зв'язків носія з контейнером.

**Мета статті** – створення математичної моделі руху системи ракета-контейнер під час мінометного старту. В зв'язку з тим, що модель повинна застосовуватись на етапах ескізного проектування, створено гіпотетичний варіант. Але при цьому враховано, щоб розрахункові схеми містили в собі

всі складові можливих реальних конструкцій і відповідали сучасним технічним рішенням.

## Основна частина

Мінометний старт ("холодний" старт) - спосіб запуску ракети, при якому ракета викидається з транспортно-пускового контейнера (ТПК) пускової установки за рахунок тиску, що створюється в замкнутому об'ємі яким-небудь джерелом, розташованим поза ракетою [1, 2]. Таким джерелом може служити, наприклад, пороховий акумулятор тиску, який викидає ракету з шахти на висоту, достатню для безпечного включення двигуна ракети [2, 3, 5, 7]. Рух в системі "ракета - контейнер" при такому старті слід в часі поділити на три ділянки [4]. Перша ділянка – це ділянка відносного поступального руху ракети в контейнері. Існування цієї ділянки забезпечується наявністю центруючих опорних поясів (облутераторів) на корпусі ракети. Ділянка починається з моменту зрушення ракети і завершується в момент, коли передостанній облутератор втрачає контакт з контейнером. Друга ділянка – це ділянка відносного складного руху ракети в контейнері. Ця ділянка руху починається після втрати передостаннім облутератором контакту з внутрішньою поверхнею контейнера і закінчується в момент, коли останній нижній облутератор втратить контакт з поверхнею контейнера. Третя ділянка руху системи – це рух контейнера після повної втрати ракетою механічного контакту з контейнером, що являє собою вільні затухаючі коливання.

Розглянемо окремо кожен з ділянок та запишемо системи диференціальних рівнянь руху ракети та контейнера на цих ділянках. Рух складових частин системи будемо розглядати як плоский.

**Ділянка відносного поступального руху ракети в контейнері.** Рух ракети на цій ділянці розглядаємо як складний, що складається з поступального руху ракети відносно контейнера і переносного руху контейнера. Для дослідження відносного руху ракети застосуємо теорему про рух центру мас системи [8] у відносному русі, додавши до діючих на ракету сил і реакцій її зв'язків головні вектори переносних і коріолісових сил інерції мас ракети. Якщо при розгляді руху контейнера як переносного для ракети, в якості полюса взяти точку  $O'$  - центр опорної поверхні контейнера, то переносний обертальний рух контейнера буде уявляти обертання навколо точки  $O'$ .

Для запису рівнянь руху ракети і контейнера на ділянці відносного поступального руху ракети в контейнері запровадимо наступні системи осей (рис.1): нерухому систему  $Ox$  з початком в точці  $O$

на поверхні недеформованої ґрунтової основи під центром опорної поверхні контейнера; незмінно пов'язану з контейнером систему рухомих осей  $O_1x_1y_1$  з початком в точці  $O_1$  на верхньому зрізі контейнера, вісь  $y_1$  якої є головною центральною віссю інерції контейнера. Положення рухомих осей  $O_1x_1y_1$  відносно нерухомої системи  $Ox$  визначаємо кутом  $\varphi$ , який одночасно є кутом повороту контейнера разом з ракетою при її відносному поступальному русі.

На ракету діють такі сили: прикладена в центрі мас рівнодіюча сил тяжіння  $\vec{M}_2\vec{g}$ ; рівнодіюча  $\vec{P}$  сил тиску на донну поверхню ракети, лінія дії якої проходить через центр мас ракети; сили нормальної реакції  $\vec{N}_1$  нижнього і  $\vec{N}_2$  верхнього опорних поясів, прикладені відповідно в точках  $K_1$  і  $K_2$  рухомих контактів корпусу ракети з контейнером; сили тертя  $\vec{F}_{T1}$  і  $\vec{F}_{T2}$  корпусу ракети по поверхні контейнера, прикладені в тих же точках  $K_1$  і  $K_2$ .

Для складання рівнянь руху центру мас ракети відносно пов'язаних з контейнером рухомих осей  $O_1x_1y_1$ , додамо до діючих сил прикладені в центрі мас ракети головні вектори її переносних нормальних сил інерції  $\vec{\Phi}_{\text{пер}}^n$ , дотичних переносних

сил інерції  $\vec{\Phi}_{\text{пер}}^{\tau}$  та коріолісових сил інерції  $\vec{\Phi}_{\text{кор}}$ .

Визначимось з цими складовими сил інерції. Для цього розглянемо кожен головний вектор сил інерції як додатак елементарних сил інерції ракети при її русі по відношенню до контейнера, який в свою чергу обертається навколо центру  $O'$ . Впливом поступальної складової руху контейнера на відносний рух ракети будемо нехтувати. Тому:

$$\vec{\Phi}_{\text{пер}} = \sum_{k=1}^n (\vec{f}_{ke}^n + \vec{f}_{ke}^{\tau} + \vec{f}_{k\text{кор}}),$$

або, як легко довести,

$$\vec{\Phi}_{\text{пер}} = -M_2 \cdot (\vec{\epsilon}_e \times \vec{R}_{C_2}) + (\vec{M}_2 \cdot \omega_e^2 \cdot \vec{R}_{C_2}) - 2M_2 \cdot (\vec{\omega}_e \times \vec{V}_{\text{rc}_2});$$

де:  $\vec{R}_{C_2}$  – радіус-вектор центру мас ракети відносно початку координат рухомої системи осей  $O_1x_1y_1$ ;  $\vec{V}_{\text{rc}_2}$  – швидкість центру мас ракети відносно пов'язаної з контейнером рухомої системи осей  $O_1x_1y_1$ ;  $\vec{\epsilon}_e$ ,  $\vec{\omega}_e$  – відповідно кутове прискорення та кутова швидкість ракети відносно контейнера;  $M_2$  – маса ракети.

В такому разі (див. рис.1):

$$\vec{\Phi}_{\text{пер}}^n = M_2 \cdot \omega_e^2 \cdot \vec{R}_{C_2};$$

$$\vec{\Phi}_{\text{пер}}^{\tau} = -M_2 \cdot (\vec{\epsilon}_e \times \vec{R}_{C_2});$$

$$\vec{\Phi}_{\text{кор}} = -2M_2 \cdot (\vec{\omega}_e \times \vec{V}_{\text{rc}_2}).$$

Чисельні значення головних векторів сил інерції (рис.1, 2):

$$\Phi_{\text{пер}}^n = M_2 \cdot \omega_e^2 \cdot R_{C_2} = M_2 \cdot \dot{\phi}_1^2 \cdot O'C_2;$$

$$\Phi_{\text{пер}}^\tau = M_2 \cdot \varepsilon_e \cdot R_{C_2} = M_2 \cdot \ddot{\phi}_1 \cdot O'C_2; \quad (1)$$

$$\Phi_{\text{кор}} = 2M_2 \cdot \omega_e \cdot V_{\text{rc}_2} = 2M_2 \cdot \dot{\phi}_1 \cdot V_{\text{rc}_2},$$

де  $O'C_2 = H_0 + L_2 + \Delta y_{1C_2}$ ;  $\Delta y_{1C_2} = y_{1C_2} - (y_{1C_2})_0$ ;  
 $(y_{1C_2})_0 = H_0 + L_2 - H$ ;  $(y_{1C_2})_{\text{кінц}} = L_2 - L_{12}$ ;  $\phi_1 = \phi$ .

Векторне рівняння руху центру мас ракети по відношенню до системи осей  $O_1x_1y_1$ , незмінно пов'язаних з контейнером, має вигляд:

$$M_2 \cdot \frac{d\vec{V}_{\text{rc}_2}}{dt} = \vec{M}_2 g + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{T1} + \vec{F}_{T2} + \vec{P} + \vec{\Phi}_{\text{кор}} + \vec{\Phi}_{\text{пер}}^n + \vec{\Phi}_{\text{пер}}^\tau \quad (2)$$

де

$$F_{T1} = f \cdot N_1; \quad F_{T2} = f \cdot N_2; \quad (3)$$

$f$  – коефіцієнт тертя між внутрішньою поверхнею контейнера і контактною поверхнею об'єкта ракети.

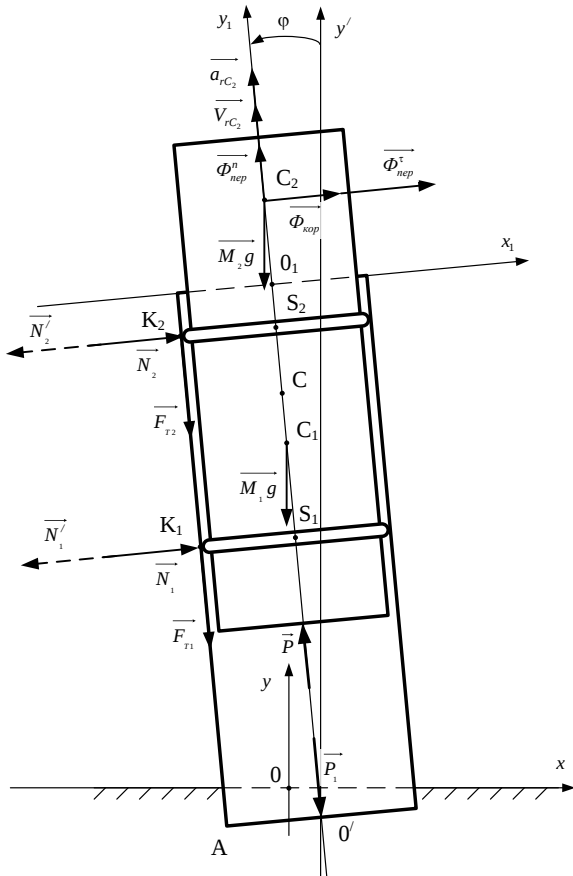


Рис.1. Сили в системі ракета-контейнер на ділянці відносного поступального руху ракети

Записуючи векторне рівняння (2) в проекціях

на вісь  $y_1$  системи осей  $O_1x_1y_1$ , отримуємо диференціальне рівняння поступального руху ракети в напрямку вісі  $y_1$ :

$$M_2 \cdot \dot{v}_{\text{ry}_1} = -M_2 \cdot g \cdot \cos \phi - F_{T1} - F_{T2} + P + \Phi_{\text{пер}}^n \quad (4)$$

де:  $v_{\text{ry}_1}$  – проекції вектора відносної швидкості  $\vec{V}_{\text{rc}_2}$  центра мас ракети відносно контейнера (відносно осей  $O_1x_1y_1$ , пов'язаних з контейнером) на вісь  $y_1$ ;  $y_{1C_2}$  – координата центру мас ракети в осях  $O_1x_1y_1$ . Остання пов'язана з проекцією вектора  $\vec{V}_{\text{rc}_2}$  диференційною залежністю

$$\dot{y}_{1C_2} = v_{\text{ry}_1}. \quad (5)$$

Геометричні розміри  $H$ ,  $H_1$ ,  $L_2$ ,  $L_{12}$  показані на рис.2 і визначаються конструктивними параметрами ТПК і ракети.

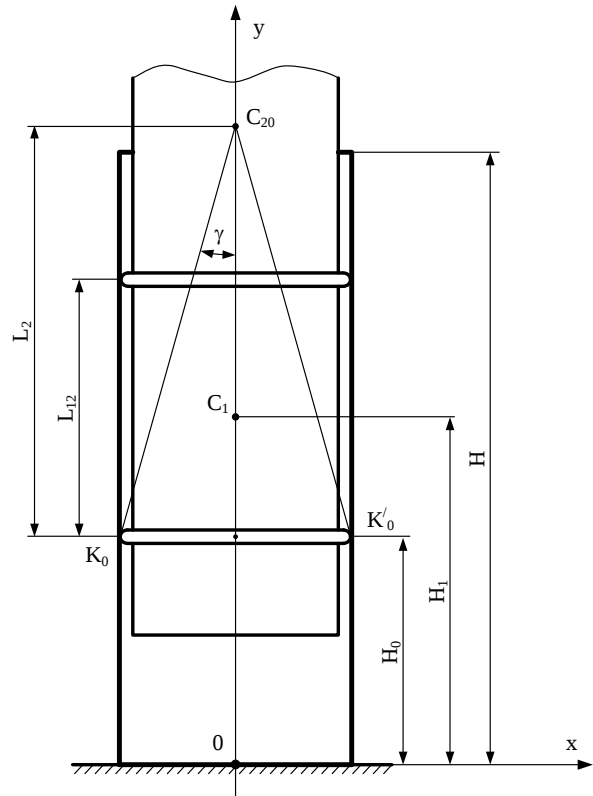


Рис.2. Основні геометричні розміри системи ракета-контейнер у стартовому положенні

Початкове значення координати  $y_1$  центру мас ракети в системі відносних координат  $O_1x_1y_1$ :

$$(y_{1C_2})_0 = H_0 + L_2 - H; \quad (6)$$

Кінцеве значення координати  $y_1$  центру мас ракети в системі відносних координат  $O_1x_1y_1$ :

$$(y_{1C_2})_{\text{кінц}} = L_2 - L_{12}; \quad (7)$$

Записуючи векторне рівняння (2) в проекціях

на вісь  $x_1$  системи осей  $O_1x_1y_1$ , отримуємо рівняння відносного спокою центру мас ракети в напрямку вісі  $x_1$ , перпендикулярної до внутрішньої поверхні контейнера у вигляді:

$$N_1 + N_2 - M_2 \cdot g \cdot \sin \varphi + \Phi_{\text{кор}} + \Phi_{\text{пер}}^{\tau} = 0. \quad (8)$$

Умова відсутності відносних кутових переміщень ракети в контейнері запишеться таким чином (рис.1, 2):

$$N_1 \cdot C_2 S_1 + N_2 \cdot C_2 S_2 = 0, \quad (9)$$

звідки

$$N_2 = -N_1 \cdot \frac{C_2 S_1}{C_2 S_2} = -N_1 \cdot \bar{L}, \quad (10)$$

де  $\bar{L} = L_2 / (L_2 - L_{12})$ .

Розв'язуючи рівняння (8) з урахуванням (10), будемо мати:

$$N_1 = \left( -M_2 \cdot g \cdot \sin \varphi + \Phi_{\text{кор}} + \Phi_{\text{пер}}^{\tau} \right) / (1 - \bar{L});$$

$$N_2 = -N_1 \cdot \bar{L}. \quad (11)$$

Так як на ділянці відносного поступального руху ракети контейнер і ракета в кожен момент часу мають однакові кути повороту, то обертальний рух ракети і контейнера визначимо одним рівнянням обертального руху контейнера разом з ракетою навколо їх загального центру мас. Положення загального центру мас контейнера з ракетою визначимо змінною в часі відстанню

$$O'C = (M_1 \cdot O'C_1 + M_2 \cdot O'C_2) / (M_1 + M_2), \quad (12)$$

де  $O'C_1 = H_1$ .

Рівняння сумісного обертального руху контейнера і ракети по відношенню до їх загального центру мас (рис.1), записане на підставі теореми про зміну моменту кількості руху системи, в кожен момент часу має вигляд

$$I_C \cdot \ddot{\varphi} = -C_{\text{гф}} \cdot \varphi - q_{\text{гф}} \cdot \dot{\varphi} +$$

$$+ M_2 g \cdot \sin \varphi \cdot (O'C_2 - O'C) -$$

$$- M_1 g \cdot \sin \varphi \cdot (O'C - O'C_1), \quad (13)$$

де  $C_{\text{гф}}$  – кутова жорсткість ґрунтової основи під контейнером;  $I_C$  – момент інерції контейнера з ракетою відносно їх загального центру мас, що у відповідності з теоремою Гюйгенса знаходиться за залежністю

$$I_C = I_{C_1} + I_{C_2} + M_1 \cdot (O'C - O'C_1)^2 +$$

$$+ M_2 \cdot (O'C_2 - O'C)^2, \quad (14)$$

де  $I_{C_1}$  і  $I_{C_2}$  – екваторіальні моменти інерції контейнера і ракети, відповідно.

До попередньо записаних рівнянь відносного руху ракети в контейнері (4) та сумісного обертального руху контейнера і ракети (13) додаємо рівняння руху центру мас контейнера у вигляді (рис.1, 5):

$$\ddot{x}_{C_1} = \frac{1}{M_1} [-c_{\text{гх}} \cdot (x_{C_1} - \xi) - q_{\text{гх}} \cdot (\dot{x}_{C_1} - \dot{\xi}) -$$

$$- M_1 g \cdot \sin \varphi + P_1 \cdot \sin \varphi - (N'_1 + N'_2) \cdot \cos \varphi -$$

$$- (N'_1 + N'_2) \cdot f \cdot \sin \varphi];$$

$$\ddot{y}_{C_1} = \frac{1}{M_1} [-c_{\text{гy}} \cdot (y_{C_1} - H_1 + \Delta_{\text{ущ}} - z) -$$

$$- q_{\text{гy}} \cdot (\dot{y}_{C_1} - \dot{z}) - M_1 g \cdot \cos \varphi - P_1 \cdot \cos \varphi -$$

$$- (N'_1 + N'_2) \cdot \sin \varphi - (N'_1 + N'_2) \cdot f \cdot \cos \varphi], \quad (15)$$

де  $x_{C_1}$ ,  $y_{C_1}$  – координати центру мас  $C_1$  контейнера в нерухомій системі осей  $Oxy$  (рис.1);  $\Delta_{\text{ущ}}$  – глибина ущільнення ґрунту (рис.7) під опорною поверхнею контейнера в статичному положенні [9];  $P_1 = P = p \cdot S_k = \pi R^2 \cdot p$  – сила тиску на донну поверхню контейнера;  $S_k$  – площа внутрішньої донної поверхні контейнера;  $p$  – тиск в контейнері;  $R$  – внутрішній радіус контейнера;  $N'_1 = N_1$ ;  $N'_2 = N_2$  – нормальні складові сили дії корпусу ракети на внутрішню поверхню контейнера;  $c_{\text{гх}}$ ,  $c_{\text{гy}}$  та  $q_{\text{гх}}$ ,  $q_{\text{гy}}$  – коефіцієнти жорсткості і опору ґрунту в напрямку осей  $x$  та  $y$  [9];  $\xi$  і  $z$  – горизонтальне та вертикальне переміщення ґрунтової основи під контейнером.

Об'єднуючи диференційні рівняння другого порядку (4), (5), (13) та (15) в систему рівнянь та понижаючи порядок рівнянь, шляхом введення проміжних величин, отримаємо наступну систему диференційних рівнянь першого порядку:

$$1. \dot{y}_{1C_1} = v_{\text{гy}_1};$$

$$2. \dot{v}_{\text{гy}_1} = \frac{1}{M_2} \left( -M_2 \cdot g \cdot \cos \varphi - F_{\text{T1}} - F_{\text{T2}} + P + \Phi_{\text{пер}}^{\text{n}} \right);$$

$$3. \dot{\varphi} = \epsilon;$$

$$4. \dot{\epsilon} = \frac{1}{I_C} [-C_{\text{гф}} \cdot \varphi - q_{\text{гф}} \cdot \dot{\varphi} +$$

$$+ M_2 g \cdot \sin \varphi \cdot (O'C_2 - O'C) - M_1 g \cdot \sin \varphi \cdot (O'C - O'C_1)];$$

$$5. \dot{x}_{C_1} = \eta;$$

$$6. \dot{\eta} = \frac{1}{M_1} [-c_{\text{гх}} \cdot (x_{C_1} + H_1 \cdot \sin \varphi - \xi) -$$

$$- q_{\text{гх}} \cdot (\dot{x}_{C_1} - \dot{\xi}) - M_1 g \cdot \sin \varphi + P_1 \cdot \sin \varphi -$$

$$- (N'_1 + N'_2) \cdot \cos \varphi - (N'_1 + N'_2) \cdot f \cdot \sin \varphi];$$

$$7. \dot{y}_{C_1} = \mu;$$

$$8. \dot{\mu} = \frac{1}{M_1} [-c_{\text{гy}} \cdot (y_{C_1} - H_1 + \Delta_{\text{ущ}} - z) -$$

$$- q_{\text{гy}} \cdot (\dot{y}_{C_1} - \dot{z}) - M_1 g \cdot \cos \varphi - P_1 \cdot \cos \varphi -$$

$$- (N'_1 + N'_2) \cdot \sin \varphi - (N'_1 + N'_2) \cdot f \cdot \cos \varphi]. \quad (16)$$

**Ділянка відносного складного руху ракети в контейнері.** Будемо вважати, що після виходу з контейнера передостаннього опорного поясу

(облукатора) ракети і до повної втрати зв'язку з контейнером, ракета певний проміжок часу контактує з контейнером однією точкою (точка К, рис.3). Будемо також вважати, що контейнер при цьому крім поступальних рухів здійснює кутові переміщення, які являють собою повороти навколо точки  $O'$  його опорної поверхні.

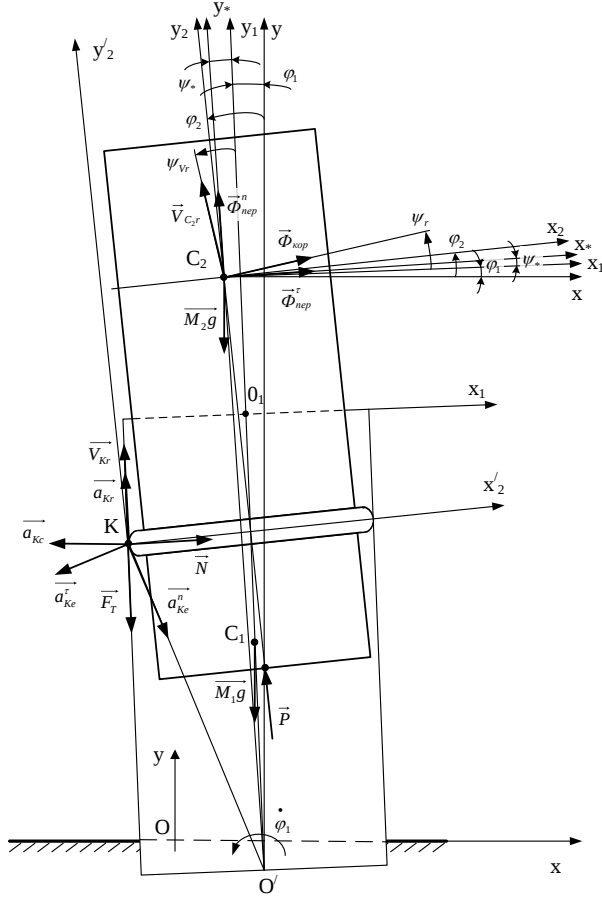


Рис.3. Розрахункова модель системи ракета-контейнер на ділянці складного відносного руху ракети

Для запису рівнянь руху ракети і контейнера на цій ділянці запровадимо наступні системи осей (рис.3): нерухому систему  $Ox_1y_1$  з початком в точці  $O$  на поверхні недеформованої ґрунтової основи під центром опорної поверхні контейнера; незмінно пов'язану з контейнером систему рухомих осей  $O_1x_1y_1$  з початком в точці  $O_1$  на верхньому зрізі контейнера, вісь  $y_1$  якої є головною центральною віссю інерції контейнера; пов'язану з ракетою систему її головних центральних осей  $C_2x_2y_2$ ; систему допоміжних осей  $C_2x_*y_*$ , вісь  $y_*$  якої проходить через точку  $O'$  центру повороту контейнера. Положення рухомих осей  $Ox_1y_1$  відносно нерухомої системи  $Ox_1y_1$  визначаємо кутом  $\phi_1$ . Положення рухомої системи  $C_2x_2y_2$  відносно системи нерухомих осей  $Ox_1y_1$  – кутом  $\phi_2$ . Кут  $\psi_*$

визначає положення осей системи  $C_2x_*y_*$  відносно осей  $O_1x_1y_1$ . Положення вектора відносної швидкості  $\vec{V}_{rc2}$  центру мас ракети відносно рухомих осей  $O_1x_1y_1$  будемо визначати кутом  $\psi_r$ .

На ракету діють такі сили: прикладена в центрі мас рівнодіюча сил тяжіння  $\vec{M}_2g$ ; сила  $\vec{P}$  тиску на донну поверхню ракети, лінія дії якої проходить через центр мас ракети; сила  $\vec{N}$  нормальної реакції поверхні контейнера на тиск ракети в точці К рухомого контакту корпусу ракети з контейнером; сила тертя корпусу ракети по поверхні контейнера  $\vec{F}_T$ .

Як і на попередній ділянці руху ракети, для складання рівнянь руху центру мас ракети відносно пов'язаних з контейнером рухомих осей  $O_1x_1y_1$ , додамо до діючих сил прикладені в центрі мас ракети головні вектори її переносних нормальних сил інерції  $\vec{\Phi}_{пер}^n$ , дотичних переносних сил інерції  $\vec{\Phi}_{пер}^\tau$  та коріолісових сил інерції  $\vec{\Phi}_{кор}$  (рис.3). Вони визначаються за допомогою виразів (1).

Рівняння руху центру мас ракети по відношенню до системи осей  $O_1x_1y_1$ , пов'язаних з контейнером, має вигляд:

$$M_2 \cdot \frac{d\vec{V}_{rc2}}{dt} = \vec{M}_2g + \vec{N} + \vec{F}_T + \vec{P} + \vec{\Phi}_{кор} + \vec{\Phi}_{пер}^n + \vec{\Phi}_{пер}^\tau, \quad (17)$$

де  $\vec{N}$  та  $\vec{F}_T$  – складові реакції внутрішньої поверхні контейнера.

Записуючи рівняння (17) в проекціях на осі  $O_1x_1y_1$ , будемо мати такі два рівняння:

$$\begin{aligned} M_2 \cdot \dot{v}_{rx1} &= -M_2 \cdot g \cdot \sin \phi_1 + N - \Phi_{кор} \cos \psi_r - P \cdot \sin(\phi_2 - \phi_1) - \\ &\quad - \Phi_{пер}^n \cdot \sin \psi_* + \Phi_{пер}^\tau \cdot \cos \psi_*; \\ M_2 \cdot \dot{v}_{ry1} &= -M_2 \cdot g \cdot \cos \phi_1 - F_T + \\ &\quad + P \cdot \cos(\phi_2 - \phi_1) + \Phi_{кор} \sin \psi_r + \\ &\quad + \Phi_{пер}^n \cdot \cos \psi_* + \Phi_{пер}^\tau \cdot \sin \psi_*, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\operatorname{tg} \psi_r = -\frac{v_{rx1}}{v_{ry1}}$ ;  $\operatorname{tg} \psi_* = -\frac{x_{1C2}}{y_{1C2}}$ ;  $v_{rx1}$ ,  $v_{ry1}$  –

проекції вектора відносної швидкості  $\vec{V}_{rc2}$  центра мас ракети відносно контейнера (відносно осей  $O_1x_1y_1$ , пов'язаних з контейнером) на вісі  $x_1$  та  $y_1$ ;  $x_{1C2}$ ,  $y_{1C2}$  – координати центра мас ракети в осях  $O_1x_1y_1$ . Останні зв'язані з проекціями швидкості вектора  $\vec{V}_{rc2}$  диференціальними залежностями

$$\dot{x}_{1C2} = v_{rx1}; \quad \dot{y}_{1C2} = v_{ry1} \quad (19)$$

Чисельне значення відносної швидкості

$$V_{rc2} = \sqrt{v_{rx1}^2 + v_{ry1}^2}. \quad (20)$$

Для визначення обертального руху ракети скористаємося теоремою про зміну моменту кількості руху матеріальної системи по відношенню до рухомого центру, що не співпадає з її центром мас [8]. У відповідності з цією теоремою в якості рухомого центру візьмемо точку К поверхні облютератора ракети, якою вона контактує з внутрішньою поверхнею контейнера (рис.3). Застосовуючи теорему до тіла ракети при рухомому центрі К, будемо мати векторне рівняння:

$$\frac{d\vec{K}^\omega_K}{dt} + \vec{\omega}_2 \times \vec{K}^\omega_K = \vec{M}_K^e - M_2 \cdot \vec{\rho}_{C2K} \times \vec{a}_K, \quad (21)$$

яке для плоского руху ракети приймає вигляд:

$$I_K \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = M_K^e - M_2 \cdot (\rho_{C2x'_2} \cdot a_{Ky'_2} - \rho_{C2y'_2} \cdot a_{Kx'_2}), \quad (22)$$

де  $\vec{K}^\omega_K$  – момент кількості руху ракети відносно рухомого центру К тільки за рахунок обертання ракети навколо цього центру;  $\vec{\omega}_2$  – кутова швидкість обертання ракети відносно рухомого центру К;  $\vec{M}_K^e$  – головний момент діючих на ракету зовнішніх сил відносно рухомого центру К;  $\vec{\rho}_{C2K} = \vec{KC}_2$  – радіус-вектор центру мас ракети відносно рухомого центру К;  $\vec{a}_K$  – абсолютне прискорення рухомого центру К;  $\rho_{C2x'_2}$ ,  $\rho_{C2y'_2}$ ,  $a_{Kx'_2}$ ,  $a_{Ky'_2}$  – проекції векторів  $\vec{\rho}_{C2K}$  і  $\vec{a}_K$  на незмінно зв'язані з ракетою вісі  $Kx'_2y'_2$  що мають початок в рухомому центрі К і паралельні головним центральним осям  $C_2x_2y_2$  ракети;  $I_K$  – момент інерції ракети відносно центру К.

Прискорення точки К корпусу ракети знайдемо як прискорення точки при її складному русі:

$$\vec{a}_K = \vec{a}_{Kr} + \vec{a}_{Ke}^n + \vec{a}_{Ke}^\tau + \vec{a}_{Kc}, \quad (23)$$

де  $\vec{a}_{Kr}$  – відносне прискорення точки К в системі рухомих осей  $O_1x_1y_1$ , незмінно зв'язаної з контейнером;  $\vec{a}_{Ke}^n$  – нормальне переносне прискорення точки К при обертанні рухомих осей  $O_1x_1y_1$  навколо точки  $O'$ ;  $\vec{a}_{Ke}^\tau$  – дотичне переносне прискорення точки К при обертанні рухомих осей  $O_1x_1y_1$  навколо точки  $O'$ ;  $\vec{a}_{Kc}$  – коріолісове прискорення точки К при її складному русі, з урахуванням виразу для якого залежність (23)

набуває вигляду

$$\vec{a}_K = \vec{a}_{Kr} + \vec{a}_{Ke}^n + \vec{a}_{Ke}^\tau + 2 \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_{Kr}), \quad (24)$$

де:  $\vec{\omega}_1$  – кутова швидкість обертання пов'язаної з контейнером рухомої системи  $O_1x_1y_1$  навколо точки  $O'$ ;  $\vec{V}_{Kr}$  – відносна швидкість точки К корпусу ракети в системі  $O_1x_1y_1$ . Вектори відносної швидкості  $\vec{V}_{Kr}$  та відносного прискорення  $\vec{a}_{Kr}$  точки К корпусу ракети спрямовані вздовж внутрішньої бокової стінки контейнера; переносне нормальне прискорення  $\vec{a}_{Ke}^n$  спрямовано вздовж відрізка  $\vec{O'K}$ , що з'єднує центр повороту  $O'$  контейнера з точкою К, в напрямку від точки К до центру  $O'$ ; переносне дотичне прискорення  $\vec{a}_{Ke}^\tau$

спрямовано перпендикулярно відрізку  $\vec{O'K}$  в бік переносного кутового прискорення (кутового прискорення контейнера); вектор коріолісового прискорення  $\vec{a}_{Kc}$  спрямований перпендикулярно боковій стінці контейнера.

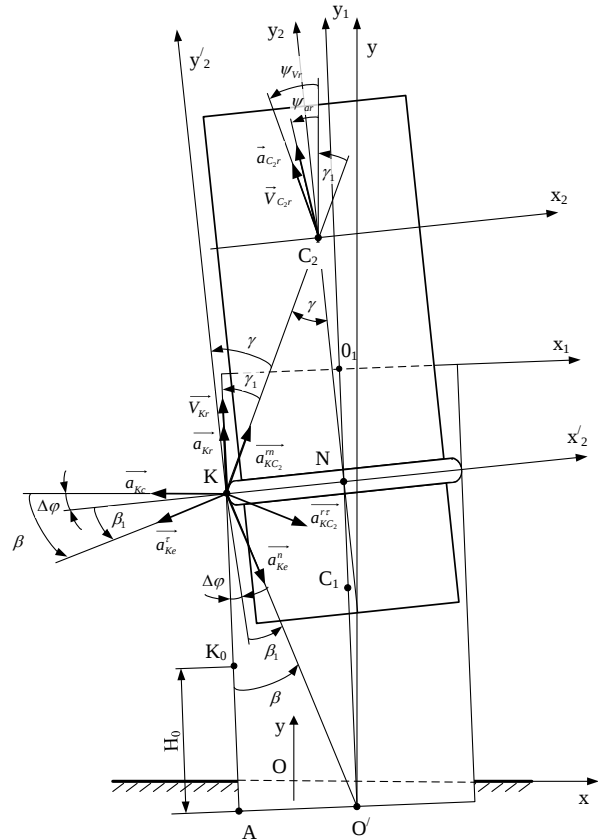


Рис.4. Кінематична схема системи ракета-контейнер на ділянці складного відносного руху ракети

Чисельні значення складових абсолютного прискорення точки К:

$$a_{Ke}^n = \omega_1^2 \cdot O'K = \dot{\phi}_1^2 \cdot O'K;$$

$$a_{Ke}^{\tau} = \varepsilon_1 \cdot O'K = \ddot{\phi}_1 \cdot O'K;$$

$$a_{Kc} = 2\omega_1 \cdot V_{Kr} = 2 \cdot \dot{\phi}_1 \cdot V_{Kr}, \quad (25)$$

Значення відносної швидкості точки К знайдемо за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки, застосувавши її для відносного руху ракети. Будемо мати (рис.4):

$$V_{Kr} \cdot \cos \gamma_1 = V_{rc2} \cdot \cos(\psi_r + \gamma_1),$$

звідки

$$V_{Kr} = V_{rc2} \cdot \frac{\cos(\psi_r + \gamma_1)}{\cos \gamma_1}, \quad (26)$$

де:  $\gamma_1 = \gamma - \Delta\phi$ ,  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{R}{L_2}$ ;  $L_2$  – відстань між серединою нижнього опорного поясу ракети та центром мас ракети (рис.2).

Відстань від рухомої точки К до центру повороту контейнера

$$O'K = \sqrt{O'A^2 + AK^2}, \quad (27)$$

де  $O'A = R$ ;  $AK = H - L_{12} + \Delta y_{1c2}$ ,  $L_{12}$  – відстань між серединами нижнього і передостаннього опорних поясів (рис.2);  $H$  – висота контейнеру;  $\Delta y_{1c2}$  – приріст координата центру мас ракети на ділянці її відносного складного руху в системі  $O_1x_1y_1$  з початком в точці  $O_1$  на верхньому зрізі контейнера (рис.3). Для отримання  $\Delta y_{1c2}$  треба записати початкове значення  $y_{1c2}$ , а потім вилучити його з розрахункового значення  $y_{1c2}$  на кожному кроці чисельного інтегрування.

Для знаходження значення відносного прискорення точки К в системі рухомих осей  $O_1x_1y_1$  спочатку з рівнянь (19) знайдемо проекції вектора прискорення центру мас ракети  $\vec{a}_{rc2}$  на вісі  $O_1x_1y_1$ , позначивши їх  $a_{rx1}$  та  $a_{ry1}$ :

$$\begin{aligned} a_{rx1} &= \dot{v}_{rx1} = \\ &= \frac{1}{M_2} [-M_2g \cdot \sin \phi_1 + N - \Phi_{кор} \cdot \cos \psi_r - \\ &- P \cdot \sin \Delta\phi - \Phi_{пер}^n \cdot \sin \psi_* + \Phi_{пер}^{\tau} \cdot \cos \psi_*]; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} a_{ry1} &= \dot{v}_{ry1} = \\ &= \frac{1}{M_2} [-M_2g \cdot \cos \phi_1 - F_T + P \cdot \cos \Delta\phi + \\ &+ \Phi_{кор} \cdot \sin \psi_r + \Phi_{пер}^n \cdot \cos \psi_* + \Phi_{пер}^{\tau} \cdot \sin \psi_*]; \end{aligned}$$

Напрямок вектора відносного прискорення центру мас ракети в системі рухомих осей  $O_1x_1y_1$  визначається кутом  $\psi_{ar}$  (рис.4) за умови, що

$$\operatorname{tg} \psi_{ar} = \frac{a_{rx1}}{a_{ry1}}.$$

Прийнявши точку  $C_2$  за полюс, знайдемо

відносне прискорення точки К корпусу ракети за теоремою про зв'язок прискорень двох точок тіла при плоскому русі:

$$\vec{a}_{rK} = \vec{a}_{rc2} + \vec{a}_{KC2}^{rn} + \vec{a}_{KC2}^{rt}, \quad (29)$$

де  $\vec{a}_{KC2}^{rn}$  – нормальна складова прискорення точки К при її обертанні у відносному русі навколо точки  $C_2$ ;  $\vec{a}_{KC2}^{rt}$  – дотична складова цього прискорення.

Чисельні значення складових вектора прискорення точки К при її обертанні у відносному русі навколо точки  $C_2$ :

$$\begin{aligned} a_{KC2}^{rn} &= (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 \cdot KC_2; \\ a_{KC2}^{rt} &= (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) \cdot KC_2, \end{aligned} \quad (30)$$

де  $KC_2 = \sqrt{R^2 + L_2^2}$  (рис.2, 4).

Визначившись зі складовими виразу (23) для прискорення точки К, запишемо проекції  $\vec{a}_K$  на незмінно пов'язані з ракетою вісі  $Kx'_2y'_2$  що мають початок в рухомому центрі К і паралельні головним центральним осям  $C_2x_2y_2$  ракети. Ці проекції входять до залежності (22) (див. рис.4):

$$\begin{aligned} a_{Kx'_2} &= \left( \vec{a}_{rc2} \right)_{x'_2} + a_{KC2}^{rn} \cdot \sin \gamma + a_{KC2}^{rt} \cdot \cos \gamma + \\ &+ a_{Ke}^n \cdot \sin \beta_1 - a_{Ke}^{\tau} \cdot \cos \beta_1 - a_{Kc} \cdot \cos \Delta\phi, \\ a_{Ky'_2} &= \left( \vec{a}_{rc2} \right)_{y'_2} + a_{KC2}^{rn} \cdot \cos \gamma - a_{KC2}^{rt} \cdot \sin \gamma - \\ &- a_{Ke}^n \cdot \cos \beta_1 - a_{Ke}^{\tau} \cdot \sin \beta_1 + a_{Kc} \cdot \sin \Delta\phi, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\beta_1 = \beta - \Delta\phi$ ;  $\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{AK}$ ;  $AK = H - L_{12} + \Delta y_{1c2}$ .

Визначимо проекції вектора  $\vec{a}_{rc2}$  на вісі  $Kx'_2y'_2$ , (рис.4) коли відомі його проекції на вісі  $O_1x_1y_1$ , представлені залежністю (28). Згадані вісі взаємно повернуті на кут  $\Delta\phi$ . Використовуючи відомі залежності для повороту осей, будемо мати:

$$\begin{cases} \left( \vec{a}_{rc2} \right)_{x'_2} = a_{rx1} \cdot \cos \Delta\phi + a_{ry1} \cdot \sin \Delta\phi, \\ \left( \vec{a}_{rc2} \right)_{y'_2} = -a_{rx1} \cdot \sin \Delta\phi + a_{ry1} \cdot \cos \Delta\phi. \end{cases} \quad (32)$$

Проекції радіуса-вектора  $\vec{\rho}_{c2}$  центру мас ракети відносно рухомого центру К ( $\vec{\rho}_{c2} = \overrightarrow{KC_2}$ ) на незмінно пов'язані з ракетою вісі  $Kx'_2y'_2$  знайдемо так (рис.3, 4):

$$\rho_{c2x'_2} = R; \rho_{c2y'_2} = L_2. \quad (33)$$

Додаток моментів всіх зовнішніх сил, що діють на ракету відносно рухомого центру К:

$$M_K^e = M_K(\overrightarrow{M_2g}) + M_K(\vec{p}) - M_r$$

де  $M_r = I_r \cdot \omega_r \cdot \dot{\phi}_2$  – гіроскопічний стабілізуючий

момент,  $I_r$  – момент інерції стабілізуючого гіроскопа,  $\omega_r$  – кутова швидкість стабілізуючого гіроскопа.

Підставляючи очевидні вирази для моментів сили тяжіння  $\vec{M}_{2g}$  та сили тиску на донну поверхню  $\vec{P}$ , будемо мати:

$$M_K^e = \rho_{c_2 x'_2} \cdot (\vec{M}_{2g})_{y'_2} - \rho_{c_2 y'_2} \cdot (\vec{M}_{2g})_{x'_2} + P \cdot R - M_r. \quad (34)$$

Проекції вектора сили тяжіння на вісі  $Kx'_2y'_2$  дорівнюють:

$$\begin{aligned} (\vec{M}_{2g})_{x'_2} &= -M_{2g} \cdot \sin \varphi_2; \\ (\vec{M}_{2g})_{y'_2} &= -M_{2g} \cdot \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Підставляючи (33) і (35) в (34), остаточно будемо мати:

$$M_K^e = R(P - M_{2g} \cdot \cos \varphi_2) + L_2 \cdot M_{2g} \cdot \sin \varphi_2 - M_r. \quad (36)$$

Запишемо рівняння обертального руху ракети у іншому вигляді, застосувавши для цього теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної системи по відношенню до її центру мас (рис.3).

$$I_{c_2} \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{c_2}(\vec{N}) + M_{c_2}(\vec{F}_T) - M_r, \quad (37)$$

де  $I_{c_2}$  – момент інерції ракети відносно її центру мас;  $M_r = I_r \cdot \omega_r \cdot \dot{\varphi}_2$  – гіроскопічний стабілізуючий момент,  $I_r$  – момент інерції стабілізуючого гіроскопа,  $\omega_r$  – кутова швидкість стабілізуючого гіроскопа.

Вектори моментів реакції  $\vec{N}$  та сили тертя  $\vec{F}_T$  відносно центру мас ракети визначаються так:

$$\vec{M}_{c_2}(\vec{N}) = \vec{C}_2 \vec{K} \times \vec{N} = -\vec{K} \vec{C}_2 \times \vec{N} = -\rho_{c_2} \times \vec{N},$$

$$\vec{M}_{c_2}(\vec{F}_T) = \vec{C}_2 \vec{K} \times \vec{F}_T = -\vec{K} \vec{C}_2 \times \vec{F}_T = -\rho_{c_2} \times \vec{F}_T. \quad (38)$$

Їх алгебраїчні значення отримаємо, розкриваючи відповідний визначник векторного добутку:

$$\vec{M}_{c_2}(\vec{N}) = -[\rho_{c_2 x'_2} \cdot (\vec{N})_{y'_2} - \rho_{c_2 y'_2} \cdot (\vec{N})_{x'_2}],$$

$$\vec{M}_{c_2}(\vec{F}_T) = -[\rho_{c_2 x'_2} \cdot (\vec{F}_T)_{y'_2} - \rho_{c_2 y'_2} \cdot (\vec{F}_T)_{x'_2}], \quad (39)$$

де проекції радіуса-вектора  $\vec{\rho}_{c_2}$  центру мас ракети відносно точки  $K$  на рухомі вісі  $Kx'_2y'_2$  визначаються залежностями (33), а проекції нормальної реакції  $\vec{N}$  та сили тертя  $\vec{F}_T$  на ті ж самі вісі мають значення

$$\begin{aligned} (\vec{N})_{x'_2} &= N \cdot \cos \Delta \varphi; \\ (\vec{N})_{y'_2} &= -N \cdot \sin \Delta \varphi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{F}_T)_{x'_2} &= -Nf \cdot \sin \Delta \varphi; \\ (\vec{F}_T)_{y'_2} &= -Nf \cdot \cos \Delta \varphi. \end{aligned} \quad (40)$$

Підставляючи послідовно (40) в (39) і (33) та (39) в (37), будемо мати рівняння обертального руху ракети навколо центру мас у вигляді:

$$I_{c_2} \cdot \ddot{\varphi}_2 = N \cdot [R \cdot (\sin \Delta \varphi + f \cdot \cos \Delta \varphi) + L_2 \cdot (\cos \Delta \varphi - f \cdot \sin \Delta \varphi)] - M_r. \quad (41)$$

Прирівнявши вирази для  $\ddot{\varphi}_2$ , отримані по черзі з рівнянь (22) та (41), будемо мати:

$$\begin{aligned} N = \frac{I_{c_2}}{I_K} \cdot \{ & (P - M_{2g} \cdot \cos \varphi_2) \cdot R + \\ & + M_{2g} \cdot L_2 \sin \varphi_2 - \\ & - M_2 \cdot (R \cdot a_{Ky'_2} - L_2 \cdot a_{Kx'_2}) \} / \\ & / \{ R \cdot (\sin \Delta \varphi + f \cdot \cos \Delta \varphi) + \\ & + L_2 \cdot (\cos \Delta \varphi - f \cdot \sin \Delta \varphi) \}, \end{aligned} \quad (42)$$

де  $a_{Kx'_2}$ ,  $a_{Ky'_2}$  – визначаються залежностями (31), (32).

Отримаємо величину динамічної реакції внутрішньої поверхні контейнера  $\vec{N}$ , використавши для цього рівняння зв'язків між параметрами, що характеризують рух складових частин системи ракета-контейнер. Векторне рівняння зв'язку запишемо при цьому у вигляді (рис.1):

$$\vec{OC}_2 = \vec{OO'} + \vec{OA} + \vec{AK} + \vec{KN} + \vec{NC}_2. \quad (43)$$

Запишемо рівняння (43) в проекціях на вісь  $x$  системи нерухомих осей  $Oxy$  нехтуючи горизонтальним переміщенням точки  $O'$ . В результаті отримаємо (рис.3):

$$\begin{aligned} x_{C_2} = & -R \cdot \cos \varphi_1 - AK \cdot \sin \varphi_1 + \\ & + R \cdot \cos \varphi_2 - L_2 \cdot \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Двічі диференціюючи за часом (44), отримаємо:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{C_2} = & \ddot{\varphi}_1 \cdot (R \cdot \sin \varphi_1 - AK \cdot \cos \varphi_1) + \\ & + \dot{\varphi}_1^2 \cdot (R \cdot \cos \varphi_1 + AK \cdot \sin \varphi_1) - \\ & - 2 \cdot v_{Kr} \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos \varphi_1 - a_{Kr} \cdot \sin \varphi_1 - \\ & - \ddot{\varphi}_2 \cdot (R \cdot \sin \varphi_2 + L_2 \cdot \cos \varphi_2) + \\ & + \dot{\varphi}_2^2 \cdot (R \cdot \cos \varphi_2 - L_2 \cdot \sin \varphi_2). \end{aligned} \quad (45)$$

При диференціюванні враховано, що  $AK = v_{Kr}$ .

Внаслідок малості кутів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  вираз (45) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{C_2} = & -\ddot{\varphi}_1 \cdot AK + \dot{\varphi}_1^2 \cdot R - 2 \cdot v_{Kr} \cdot \dot{\varphi}_1 + \\ & + \dot{\varphi}_2^2 \cdot R - \ddot{\varphi}_2 \cdot L_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Рівняння абсолютного руху центру мас ракети в проекціях на вісь  $x$  системи нерухомих осей  $Oxy$  має вигляд (рис.3):

$$M_2 \cdot \ddot{x}_{C_2} = -P \cdot \sin \varphi_2 + N \cdot \cos \varphi_1 + F_T \cdot \sin \varphi_1$$

або ж

$$M_2 \cdot \ddot{x}_{C_2} = -P \cdot \sin \varphi_2 + N \cdot (\cos \varphi_1 + f \cdot \sin \varphi_1). \quad (47)$$

З останнього рівняння знаходимо реакцію  $N$ :

$$N = \frac{M_2 \cdot \ddot{x}_{C_2} + P \cdot \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + f \cdot \sin \varphi_1}, \quad (48)$$

де величина  $\ddot{x}_{C_2}$  знаходиться за залежністю (46).

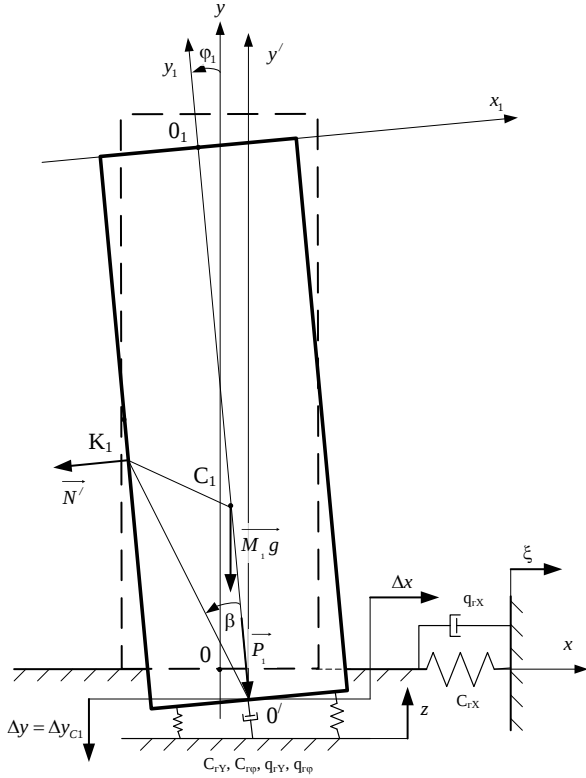


Рис.5. Контейнер на пружній ґрунтовій основі

Тепер розглянемо рух контейнера. На підставі теореми про рух центру мас системи, рівняння руху центру мас контейнера в проекціях на нерухомі вісі Oxy будуть мати вигляд (рис.5):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{C_1} = & \frac{1}{M_1} [-c_{\gamma x} \cdot (x_{C_1} - \xi) - q_{\gamma x} \cdot (\dot{x}_{C_1} - \dot{\xi}) - \\ & - M_1 g \cdot \sin \varphi_1 + P_1 \cdot \sin \varphi_1 - N' \cdot \cos \varphi_1 - \\ & - F'_T \cdot \sin \varphi_1]; \\ \ddot{y}_{C_1} = & \frac{1}{M_1} [-c_{\gamma y} \cdot (y_{C_1} - H_1 + \Delta y_{\text{ущ}} - z) - \\ & - q_{\gamma y} \cdot (\dot{y}_{C_1} - \dot{z}) - M_1 g \cdot \cos \varphi_1 - \\ & - P_1 \cdot \cos \varphi_1 - N' \cdot \sin \varphi_1 + F'_T \cdot \cos \varphi_1], \end{aligned} \quad (49)$$

де  $x_{C_1}$ ,  $y_{C_1}$  – координати центру мас  $C_1$  контейнера в нерухомій системі осей Oxy (рис.5);  $F_T = N' \cdot f$  – сила тертя поверхні облютератора по внутрішній поверхні контейнера;  $N'$  – нормальна складова сили дії корпусу ракети на внутрішню поверхню контейнера.

Рівняння обертального руху контейнера отримаємо за допомогою теореми про зміну кінетичного моменту системи по відношенню до її центру мас (рис.5):

$$I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_{C_1}(\vec{N}') + M_{C_1}(\vec{F}'_T) - C_{\gamma\varphi} \cdot \varphi_1, \quad (50)$$

де  $C_{\gamma\varphi}$  – кутова жорсткість ґрунтової основи під контейнером.

Вектори моментів діючих сил знайдемо як відповідні векторні добутки:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{C_1}(\vec{N}') &= \vec{C_1 K} \times \vec{N}'; \\ \vec{M}_{C_1}(\vec{F}'_T) &= \vec{C_1 K} \times \vec{F}'_T. \end{aligned} \quad (51)$$

Запишемо моменти (54) за допомогою відомого визначника векторного добутку:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{C_1}(\vec{N}') &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (\vec{C_1 K})_x & (\vec{C_1 K})_y & 0 \\ N'_x & N'_y & 0 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_{C_1}(\vec{F}'_T) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (\vec{C_1 K})_x & (\vec{C_1 K})_y & 0 \\ \vec{F}'_{Tx} & \vec{F}'_{Ty} & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (52)$$

Розкриваючи визначники по останньому елементу першої строки, будемо мати вирази для моментів, що входять до правої частини (50):

$$\begin{aligned} M_{C_1}(\vec{N}') &= (\vec{C_1 K})_x \cdot N'_y - (\vec{C_1 K})_y \cdot N'_x, \\ M_{C_1}(\vec{F}'_T) &= (\vec{C_1 K})_x \cdot F'_{Ty} - (\vec{C_1 K})_y \cdot F'_{Tx}. \end{aligned} \quad (53)$$

Відповідні проекції сил знайдемо таким чином ( $N' = N$ ):

$$\begin{aligned} N'_x &= -N' \cdot \cos \varphi_1; & N'_y &= -N' \cdot \sin \varphi_1; \\ F'_{Tx} &= -F'_T \cdot \sin \varphi_1; & F'_{Ty} &= -F'_T \cdot \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (54)$$

Проекції радіуса-вектора точки K прикладення сил відносно центру мас контейнера знайдемо, врахувавши, що

$$\vec{C_1 K} = \vec{O'K} - \vec{O'C_1}. \quad (55)$$

В такому разі

$$\begin{aligned} (\vec{C_1 K})_x &= -O'K \cdot \sin(\beta + \varphi_1) - O'C_1 \cdot \sin \varphi_1; \\ (\vec{C_1 K})_y &= -O'K \cdot \cos(\beta + \varphi_1) + O'C_1 \cdot \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (56)$$

Підставляючи послідовно (56) та (54) в (53), а потім в (50), будемо мати:

$$\begin{aligned} I_{C_1} \cdot \ddot{\varphi}_1 = & N' \{ [O'K \cdot \sin(\beta + \varphi_1) + O'C_1 \cdot \sin \varphi_1] \cdot (\sin \varphi_1 - \\ & - f \cdot \cos \varphi_1) + [O'K \cdot \cos(\beta + \varphi_1) + \\ & + O'C_1 \cdot \cos \varphi_1] \cdot (\sin \varphi_1 + f \cdot \cos \varphi_1) \} - C_{\gamma\varphi} \cdot \varphi_1, \end{aligned} \quad (57)$$

де  $O'C_1 = H_1$  (рис.5, 6);  $O'K$  визначається (27).

Поеднуючи диференційні рівняння руху центру мас ракети і рівняння руху ракети навколо центру мас з рівняннями руху центру мас контейнера і обертального руху контейнера та зводячи їх до диференціальних рівнянь першого порядку, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$1. \quad \dot{x}_{1C_2} = v_{\gamma x_1}; \quad (58)$$

$$2. \dot{v}_{rx1} = \frac{1}{M_2} \left[ -M_2 g \cdot \sin \varphi_1 + N - \Phi_{\text{кор}} \cdot \cos \psi_r - \right. \\ \left. - P \cdot \sin(\Delta \varphi) - \Phi_{\text{пер}}^n \cdot \sin \psi_* + \Phi_{\text{пер}}^\tau \cdot \cos \psi_* \right]; \quad (59)$$

$$3. \dot{v}_{lc2} = v_{ry1}; \quad (60)$$

$$4. \dot{v}_{ry1} = \frac{1}{M_2} \left[ -M_2 g \cdot \cos \varphi_1 - F_T + P \cdot \cos(\Delta \varphi) + \right. \\ \left. + \Phi_{\text{кор}} \cdot \sin \psi_r + \Phi_{\text{пер}}^n \cdot \cos \psi_* + \Phi_{\text{пер}}^\tau \cdot \sin \psi_* \right], \quad (61)$$

де

$$\Phi_{\text{пер}}^n = M_2 \cdot \varepsilon^2 \cdot O'C_2;$$

$$\Phi_{\text{пер}}^\tau = M_2 \cdot \dot{\varepsilon} \cdot O'C_2;$$

$$\Phi_{\text{кор}} = 2M_2 \cdot \varepsilon \cdot V_{rC_2};$$

$$O'C_2 = H + (L_2 - L_{12}) + \Delta y_{lc2}.$$

$$5. \dot{\varphi}_2 = \omega_2; \quad (62)$$

$$6. \dot{\omega}_2 = \frac{1}{I_{C_2}} \cdot \{ \{ N \cdot [R \cdot (\sin \Delta \varphi + f \cdot \cos \Delta \varphi) + \\ + L_2 \cdot (\cos \Delta \varphi - f \cdot \sin \Delta \varphi)] \} - M_r \}, \quad (63)$$

де  $M_r = I_r \cdot \omega_r \cdot \omega_2$ ;  $I_r \cdot \omega_r$  – константа, що є характеристикою гіроскопа (власний кінематичний момент гіроскопу).

$$7. \dot{\varphi}_1 = \varepsilon; \quad (64)$$

$$8. \dot{\varepsilon} = \frac{N'}{I_{C_1}} \{ [O'K \cdot \sin(\beta + \varphi_1) + \\ + O'C_1 \cdot \sin \varphi_1] \cdot (\sin \varphi_1 - f \cdot \cos \varphi_1) + \\ + [O'K \cdot \cos(\beta + \varphi_1) + \\ + O'C_1 \cdot \cos \varphi_1] \cdot (\sin \varphi_1 + f \cdot \cos \varphi_1) \} - \\ - C_{r\varphi} \cdot \varphi_1 / I_{C_1} - q_{r\varphi} \varepsilon / I_{C_1}, \quad (65)$$

$$9. \dot{x}_{c1} = \eta; \quad (66)$$

$$10. \dot{\eta} = \frac{1}{M_1} \left[ -c_{rx} \cdot (x_{c1} - \xi) - q_{rx} \cdot (\eta - \xi) - \right. \\ \left. - M_1 g \cdot \sin \varphi_1 + P \cdot \sin \varphi_1 - N' \cdot \cos \varphi_1 - \right. \\ \left. - F_T' \cdot \sin \varphi_1 \right]; \quad (67)$$

$$11. \dot{y}_{c1} = \mu; \quad (68)$$

$$12. \dot{\mu} = \frac{1}{M_1} \left[ -c_{ry} \cdot (y_{c1} - H_1 + \Delta_{yш} - z) - q_{ry} \cdot (\mu - \dot{z}) - \right. \\ \left. - M_1 g \cdot \cos \varphi_1 - P_1 \cdot \cos \varphi_1 - N' \cdot \sin \varphi_1 + \right. \\ \left. + F_T' \cdot \cos \varphi_1 \right]. \quad (69)$$

Згідно з (61) – (72) вираз (50) набуває вигляду

$$\ddot{x}_{C_2} = -\dot{\varepsilon} \cdot AK + \varepsilon^2 \cdot R - 2 \cdot V_{Kr} \cdot \varepsilon + \\ + \omega_2^2 \cdot R - \dot{\omega}_2 \cdot L_2. \quad (70)$$

Отримана система рівнянь (58)-(69) не пристосована для розв'язання чисельними методами, наприклад методом Рунге-Кутти, оскільки праві частини рівнянь (63) та (65) містять перші похідні змінних  $\dot{\omega}_2$  та  $\dot{\varepsilon}$ , які входять у праві частини виразу (48). Для того, щоб розв'язати

отриману систему диференціальних рівнянь (58)-(69) необхідно зробити перетворення у виразах (63), (65) таким чином, щоб вони містили перші похідні тільки у своїх лівих частинах.

Для цього необхідно у явному вигляді підставити (48), з урахуванням (64) у вирази (63), (65) та розв'язати отриману систему лінійних рівнянь відносно змінних  $\dot{\omega}_2$ ,  $\dot{\varepsilon}$ .

**Ділянка вільних затухаючих коливань контейнера.** Рух контейнера після повної втрати ракетною механічного контакту з контейнером являє вільні згасаючі коливання, що відбуваються під дією пружних відновлюючих сил ґрунтової основи, на яку спирається контейнер [10, 11]. Цей рух будемо розглядати як поступальний рух контейнера разом з його центром мас і обертання контейнера навколо центру мас.

Поступальну складову руху контейнера опишемо за допомогою теореми про рух центру мас матеріальної системи в проекціях на осі нерухомої системи Оху з початком в точці О на поверхні недеформованої ґрунтової основи під центром опорної поверхні контейнера (рис.5). В результаті будемо мати два диференціальних рівняння:

$$\ddot{x}_{C_1} = \frac{1}{M_1} \left[ -c_{rx} \cdot (x_{c1} + H_1 \cdot \sin \varphi_1 - \xi) - \right. \\ \left. - q_{rx} \cdot (\dot{x}_{c1} - \dot{\xi}) - M_1 g \cdot \sin \varphi_1 \right] \\ \ddot{y}_{C_1} = \frac{1}{M_1} \left[ -c_{ry} \cdot (y_{c1} - H_1 + \Delta_{yш} - z) - \right. \\ \left. - q_{ry} \cdot (\dot{y}_{c1} - \dot{z}) - M_1 g \cdot \cos \varphi_1 \right] \quad (71)$$

Рівняння обертального руху контейнера по відношенню до його центру мас (рис.5), записане на підставі теореми про зміну моменту кількості руху системи має вигляд:

$$\ddot{\varphi}_1 = (-C_{r\varphi} \cdot \varphi_1 - q_{r\varphi} \cdot \dot{\varphi}_1) / I_{C_1}. \quad (72)$$

Поєднуючи диференціальні рівняння другого порядку (71) та (72) в систему рівнянь та понижаючи порядок рівнянь, шляхом введення додаткових проміжних величин, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$1. \dot{\varphi}_1 = \varepsilon; \\ 2. \dot{\varepsilon} = (-C_{r\varphi} \cdot \varphi_1 - q_{r\varphi} \cdot \dot{\varphi}_1) / I_{C_1}; \\ 3. \dot{x}_{c1} = \eta; \\ 4. \dot{\eta} = \frac{1}{M_1} \left[ -c_{rx} \cdot (x_{c1} + H_1 \cdot \sin \varphi_1 - \xi) - \right. \\ \left. - q_{rx} \cdot (\eta - \dot{\xi}) - M_1 g \cdot \sin \varphi_1 \right]; \\ 5. \dot{y}_{c1} = \mu; \\ 6. \dot{\mu} = \frac{1}{M_1} \left[ -c_{ry} \cdot (y_{c1} - H_1 + \Delta_{yш} - z) - \right. \\ \left. - q_{ry} \cdot (\mu - \dot{z}) - M_1 g \cdot \cos \varphi_1 \right]. \quad (73)$$

**Початкові умови руху та умова відриву контейнера від ґрунту.** Системи диференціальних

рівнянь на послідовних ділянках руху системи ракета-контейнер розв'язуються чисельно методом Рунге-Кутти. При розв'язанні кінцеві результати розрахунків параметрів руху на попередній ділянці передаються в якості початкових умов руху для послідувочої ділянки. Виключення становить перша ділянка, для якої початкові умови задаються.

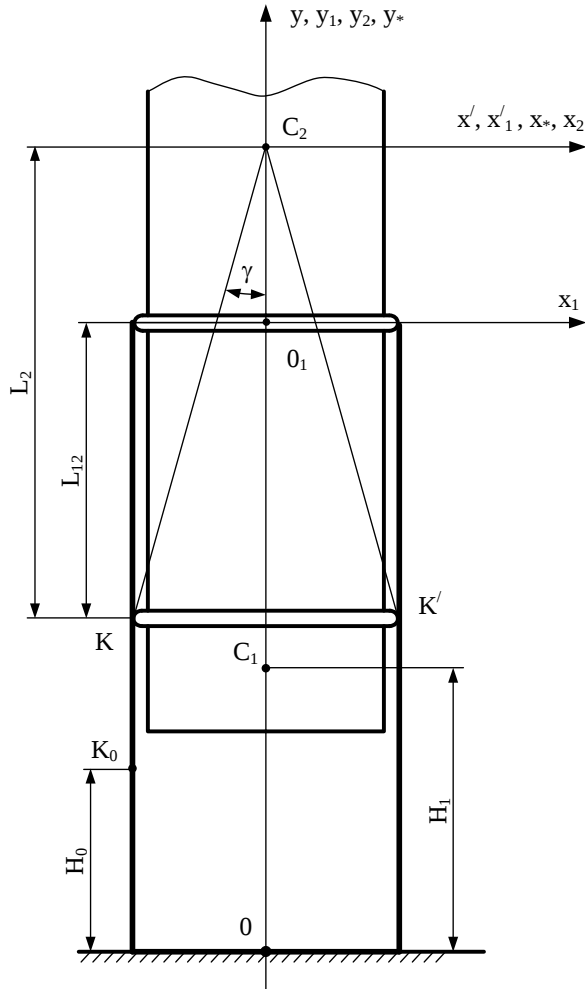


Рис.6. До визначення початкових умов розв'язання системи диференціальних рівнянь на ділянці відносного складного руху

Рух системи ракета – контейнер на першій ділянці починається при таких значеннях параметрів (рис.6, 7):

1.  $x_{1C2} = 0$ ;
2.  $v_{rx1} = 0$ ;
3.  $y_{1C2} = H_0 + L_2 - H$ ;
4.  $v_{ry1} = 0$ ;
5.  $\varphi_2 = \tilde{\varphi}$ ;
6.  $\omega_2 = 0$ ;
7.  $\varphi_1 = \tilde{\varphi}$ ;
8.  $\varepsilon = 0$ ;

9.  $x_{c1} = -[H_1 - \Delta_{y_{\text{ущ}}} - \lambda_{\text{ст}}] \cdot \sin \varphi_1$ ;
10.  $\eta = 0$ ;
11.  $y_{c1} = [H_1 - \Delta_{y_{\text{ущ}}} - \lambda_{\text{ст}}] \cdot \cos \varphi_1$ ;
12.  $\mu = 0$ ;

(74)

де  $\lambda_{\text{ст}} = (M_1 + M_2) \cdot g / c_{\text{гн}}$  – статична деформація пружної ґрунтової основи під контейнером (рис.7),  $\tilde{\varphi}$  – деякий малий кут відхилення контейнера від вертикалі внаслідок неточності установки його на ґрунт.

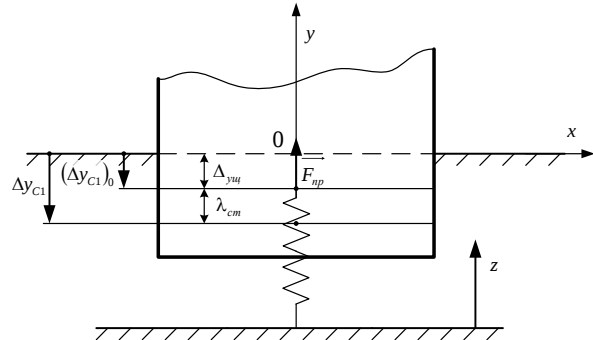


Рис.7. До визначення початкових умов старту

Рух контейнера починається з положення його статичної рівноваги, при якому (рис.7)

$$\Delta y_{C1} = -[\Delta y_{\text{ущ}} + \lambda_{\text{ст}}].$$

Умова відриву контейнера від ґрунту (рис.5, 7):

$$y_{c1} - H_1 \geq -\Delta y_{\text{ущ}},$$

або ж

$$y_{c1} - H_1 + \Delta y_{\text{ущ}} \geq 0.$$

## Висновки

У роботі побудована математична модель руху системи ракета-контейнер під час мінометного старту. Розроблено системи диференціальних рівнянь, які описують механічні процеси, що відбуваються при мінометному старті ракети. Виявлено, що старт ракети необхідно розподілити на три ділянки: ділянку поступального руху ракети, ділянку складного руху пускового контейнера і ракети, та коливань контейнера після виходу ракети з нього. Поведінка системи пусковий контейнер-ракета досліджується з урахуванням коливань ґрунтової основи після ударного навантаження.

Модель становить систему диференціальних рівнянь взаємопов'язаних рухів складових частин системи ЛА-ПУ відносно параметрів, що визначають ці рухи. Система диференціальних рівнянь представлена рівняннями першого порядку з метою її чисельного розв'язання. На підставі математичної моделі можна розробити обчислювальну програму, за допомогою якої провести чисельні дослідження впливу масових та

пружно-демпфующих параметров ПУ і ґрунту на величини динамічних реакцій внутрішніх зв'язків та ґрунтової основи, а також на збурення початкових умов старту ЛА.

### Список літератури

1. Минометный старт жидкостных баллистических ракет дальнего действия // Ракетно-космическая техника. Серия 1, вып. 5, 1975; О критериях конструктивного совершенства современных баллистических ракет. Сигнальная информация "Поиск". Серия 1, вып. 4, 1977.
2. Конюхов С.Н., Логачев П.П. Минометный старт межконтинентальных баллистических ракет. Днепрпетровск, НАН, НКА Украины, Ин-т технической механики, ГKB «Южное», 1997, 211 с.
3. Дегтярь В. Г., Пегов В. И. Гидродинамика подводного старта ракет. Москва, Машиностроение — Полет, 2009, 448 с.
4. Александров А. А., Драгун Д. К., Забегаев А. И., Ломакин В. В. Механика контейнерного старта ракеты при действии поперечных нагрузок. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 3.
5. Абакумов В. С., Ломакин В. В., Люкевич Н. В.

Моделирование динамических процессов в контейнерных пусковых установках в режимах дежурства и пуска ракет. Оборонная техника, 2003, № 1-2.

6. Ломакин В. В. Механика взаимодействия транспортно-пускового контейнера и ракеты при пуске. Оборонная техника, 2005, № 4-5.

7. Братчев А.В., Вартанов Т.Р., Плюснин А.В. Исследование некоторых свойств течения в замкнутом объеме при выталкивании поршня. Сб. тр. Четвертой конференции пользователей программного обеспечения CAD-FEM GmbH. Москва, Полигон-пресс, 2004, с. 251–257.

8. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т.2. Динамика. - М.: Наука, 1982, - 420 с.

9. Цытович Н. А. Механика грунтов (краткий курс): Учебник для строит. вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. школа., 1983.—288 с. ил.

10. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. — М: Высшая школа. — 1980. — 408 с.

11. Павлюк Н.П. О колебаниях твердого тела, опирающегося на упругое основание. — в кн. Вибрации фундаментов. Л., ОНТИ, 1933.

Рецензент:

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ РАКЕТА-КОНТЕЙНЕР ПРИ МИНОМЕТНОМ СТАРТЕ

О.М. Шийко, И.В. Коплык, О.П. Остапова, Е.Н. Авдеева

Разработана математическая модель минометного старта ракеты с транспортно-пускового контейнера. Движение в системе "ракета - контейнер" разделено по времени на три участка. Первый — участок относительного поступательного движения ракеты в контейнере. Второй — участок относительного сложного движения ракеты в контейнере. Третий — участок движения контейнера после полной потери ракетой механического контакта с контейнером, что представляет свободные колебания. Модель представляет систему дифференциальных уравнений взаимосвязанных движений составных частей системы летательный аппарат-пусковая установка относительно параметров, которые определяют эти движения.

**Ключевые слова:** минометный старт, динамика старта, система дифференциальных уравнений.

### MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF SYSTEM THE ROCKET-CONTAINER IN CASE OF MORTAR START

A.N. Shiyko, I.V. Kopylyk, O.P. Ostapova, E.N. Avdeeva

The mathematical model of the rocket mortar start from the transport and starting container is developed. Movement in system "the rocket - the container" is partitioned on time for three sections. The first — a section of the rocket relative movement in the container. The second — a section of the rocket relative difficult movement in the container. The third — a section of the container movement after total loss of mechanical contact with the container by the rocket that represents the free oscillations. The model represents system of differential equations that describes the interdependent movements of components of system the flying device - the launcher concerning parameters which define these movements.

**Keywords:** mortar start, dynamics of start, system of differential equations.

**Автори:**

**ШИЙКО Олександр Миколайович**

*Сумський національний аграрний університет, Суми, кандидат технічних наук, доцент.*

*Роб.тел. – (0542)-65-62-19, E-mail - shiykoa@mail.ru*

**КОПЛИК Ігор Володимирович**

*Сумський державний університет, Суми, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, доцент.*

*Роб.тел. – (0542)-33-31-65, E-mail - info@mss.sumdu.edu.ua*

**ОСТАПОВА Ольга Павлівна**

*Центральний НДІ озброєння та військової техніки Збройних Сил України, Сумська філія, Суми, науковий співробітник*

*Роб.тел. – (0542)-22-16-65*

**АВДЄЄВА Олена Миколаївна**

*Центральний НДІ озброєння та військової техніки Збройних Сил України, Сумська філія, Суми, науковий співробітник.*

*Роб.тел. – (0542)-22-16-65*