

Нефедченко В.Ф., Юнда А.М.

Постановка проблеми в загальному вигляді. У роботі розглядається модель і наводяться основні співвідношення, на основі яких зроблена спроба отримати точний вираз для середнього локального дипольного магнітного поля, що враховує не тільки параметри системи, але й анізотропію розподілу частинок у просторі.

Причиною появи далекого магнітного порядку є обмінна взаємодія, однак і магніто-дипольна взаємодія також може виконувати цю роль. Клас систем, у яких магніто-дипольна взаємодія структурних елементів відіграє основну роль, включає також системи однодомених феромагнітних частинок, випадково розподілених у немагнітній твердій матриці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Предметом дослідження є системи однодомених феромагнітних частинок, випадково розподілених у немагнітній твердій матриці. При розгляді таких систем припустимо, що частинки одноосні та з деякою імовірністю займають вузли просторової решітки. Будемо також вважати, що взаємодія між частинками системи є магніто-дипольна.

Однодоменні феромагнітні частинки можна охарактеризувати за допомогою магнітного моменту $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$. Рух вектора $\mathbf{m}$ без урахування дисипації описується за допомогою рівняння Ландау-Лифшиця [1]

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma_e \mathbf{m} \times \mathbf{H}_e, \quad (1)$$

де $\gamma (> 0)$ – гіромагнітне відношення, розглянуте як феноменологічний параметр, що характеризує колективний рух магнітних моментів у магнітному матеріалі;

$\mathbf{H}_e$ – ефективне магнітне поле, що діє на магнітний момент.

Магнітне поле $\mathbf{H}_e$ являє собою похідну від повної енергії магнітного матеріалу і визначається виразом:

$$\mathbf{H}_e = -\partial W / \partial \mathbf{m}.$$

Магнітна енергія частинки [2, 3] згідно з обраною нами моделлю має такий вигляд:

$$W = -(\mathbf{H}_a/2)\mathbf{m} - \mathbf{H}(t)\mathbf{m}, \quad (2)$$

де $\mathbf{H}_a$ – поле магнітної анізотропії; $\mathbf{H}(t)$ – середнє дипольне магнітне поле, що діє на довільно виділену частинку (на початку координат) з боку інших.

Частіше за все дисипацію енергії враховують шляхом введення у (1) релаксаційного доданка в формі Гільберта:

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma_e \mathbf{m} \times \mathbf{H}_e + \left(\frac{\alpha}{m} \right) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}, \quad (3)$$

де α – параметр загасання Гільберта.

Якщо замість α ввести параметр дисипації λ і врахувати теплове магнітне поле, тоді одержимо рівняння Ландау-Ліфшиця

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma_e \mathbf{m} \times (\mathbf{H}_e + \boldsymbol{\eta}) - (\lambda \gamma_e / m) \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e), \quad (4)$$

де λ ($\ll 1$) – параметр загасання Ландау-Ліфшиця;

$m = |\mathbf{m}|$ – модуль магнітного моменту;

$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(t)$ – гауссівське δ -корельовано теплове магнітне поле, яке, в свою чергу, визначається співвідношеннями:

$$\overline{\eta_\alpha(t)} = 0, \quad \overline{\eta_\alpha(t) \eta_\beta(t+\tau)} = (2\lambda k_B T / \gamma_e m) \delta_{\alpha\beta} \delta(\tau), \quad (5)$$

де k_B – стала Больцмана;

T – абсолютна температура;

$\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера;

$\alpha, \beta = x, y, z$ – осі декартової системи координат;

$\delta(\tau)$ – δ -функція; риска над функцією означає усереднення по реалізаціям теплового магнітного поля $\boldsymbol{\eta}$.

Беручи до уваги, що теплове магнітне поле $\boldsymbol{\eta}$ апроксимує реальне, яке завжди має кінцевий час кореляції, систему стохастичних рівнянь для полярного ($\theta(t) = \psi_1$) і азимутального ($\phi(t) = \psi_2$) кутів вектора $\mathbf{m}$ слід інтерпретувати за Стратоновичем (у цьому випадку $\zeta = 1/2$) [4]. Тоді, враховуючи співвідношення (2) і (5), стохастичному рівнянню (4), для магнітного моменту можна поставити у відповідність рівняння Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{t_r a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[a (\sin 2\theta + 2b(t) \sin \theta) - \text{ctg } \theta \right] P + \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\}, \quad (6)$$

де $t_r = 2/\lambda \gamma_e H_a$; $a = H_a m / 2k_B T$; $b(t) = H(t)/H_a$, для щільності імовірності $P = P(\theta, t)$ того, що в момент часу t магнітний момент $\mathbf{m}$ довільно виділеної частинки має полярний кут θ , який задовольняє умові $0 \leq \theta \leq \pi$.

Рішення рівняння (6) повинне задовольняти умову нормування і початкову умову, яка в розглянутому випадку має такий вигляд:

$$P(\theta, 0) = \delta(\theta).$$

Намагніченість $M(t)$ системи однодоменних частинок виражається через щільність імовірності P наступним чином:

$$M(t) = n \overline{m_z(t)} = nm \int_0^\pi \cos \theta P(\theta, t) d\theta, \quad (7)$$

де n – концентрація частинок.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Запропонована робота має на меті отримати точний вираз для середнього локального дипольного магнітного

поля, що враховує не тільки параметри системи, але й анізотропію розподілу частинок у просторі.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Середнє локальне поле.

Виберемо систему координат так, щоб початок координат збігався з центром виділеної частинки. Напруженість магнітного поля, створюваного системою частинок у початку координат, визначимо таким чином [5]:

$$\mathbf{h} = \sum_{i \neq 0} \frac{3\mathbf{r}_i(\mathbf{m}_i \mathbf{r}_i) - r_i^2 \mathbf{m}_i}{r_i^5}, \quad (8)$$

де $\mathbf{r}_i$ – радіус-вектор i -ї частинки.

Виконуючи математичні перетворення в (8) вираз для напруженості магнітного поля з урахуванням орієнтації магнітних моментів частинок системи набуде вигляду

$$h_\beta = \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{\beta i} r_{\alpha i} m_{\alpha i} - r_i^2 m_{\beta i}}{r_i^5}, \quad (9)$$

де $\beta, \alpha = x, y, z$ – осі декартової системи координат.

Перетворимо (9), скориставшись співвідношенням

$$r_i^2 m_{\beta i} = r_i^2 \delta_{\beta\alpha} m_{\alpha i},$$

де $\delta_{\beta\alpha}$ – символ Кронекера.

Остаточно вираз для поля $\mathbf{h}$ подамо в такому вигляді:

$$\mathbf{h}_\beta = \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{\beta i} r_{\alpha i} - \delta_{\beta\alpha} r_i^2}{r_i^5} m_{\alpha i}. \quad (10)$$

Припускаючи, що частинки займають вузли простої тетрагональної решітки з деякою імовірністю і магнітний момент кожної наночастинки орієнтований уздовж легкої осі намагнічування, яка направлена уздовж осі z (вісь четвертого порядку), помістимо початок координат у вузол, займаний будь-якою, довільно обраною частинкою. Пронумеруємо інші індексом i , тоді середнє локальне дипольне магнітне поле $H(t)$, створюване цими частинками у вузлі решітки, в якому міститься обрана частинка, можна записати так:

$$H(t) = \left\langle \sum_i I(\mathbf{r}_i) \overline{m_{iz}(t)} \right\rangle, \quad (11)$$

де кутові дужки означають усереднення за припустимими розміщеннями частинок (тут і далі передбачається, що кожен вузол решітки може займати тільки одна частинка); $I(\mathbf{r}_i)$, згідно з виразом (8) для напруженості магнітного поля має такий вигляд

$$I(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \frac{3(r_{iz} + \rho_{iz} - \tilde{\rho}_z)^2 - |\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}|^2}{|\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}|^5} d\boldsymbol{\rho}_i d\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad (12)$$

де V – об'єм наночастинки;

$d\mathbf{p}_i, d\tilde{\mathbf{p}}$ – елементи об'єму i -ї та виділеної частинок відповідно.

Відзначимо, що інтегрування в (12) ведеться за об'ємом виділеної, а також i -ї частинки.

Зведемо процедуру обчислення $I(\mathbf{r}_i)$ до обчислення інтеграла щодо об'єму однієї наночастинки і знайдемо магнітне поле, створюване i -ю частинкою в довільній точці виділеної.

Для цього введемо таке позначення:

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}_i + \mathbf{p}_i, \quad (13)$$

причому модуль вектора $\mathbf{A}$ повинен задовольняти умову:

$$|\mathbf{A}| > |\tilde{\mathbf{p}}|. \quad (14)$$

На основі (13) перепишемо (12) в такому вигляді:

$$I(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V} \int_V \frac{3(A_z - \tilde{\rho}_z)^2 - |\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{p}}|^2}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{p}}|^5} d\tilde{\mathbf{p}}. \quad (15)$$

Для обчислення інтеграла у виразі (15) розіб'ємо його на різницю двох інтегралів такого виду:

$$I(\mathbf{r}_i) = I_0(\mathbf{r}_i) - I'_0(\mathbf{r}_i), \quad (16)$$

де

$$I_0(\mathbf{r}_i) = \frac{3}{V} \int_V \frac{(A_z - \tilde{\rho}_z)^2}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{p}}|^5} d\tilde{\mathbf{p}}; \quad I'_0(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V} \int_V \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{p}}|^3}.$$

Обчислимо спочатку інтеграл $I'_0(\mathbf{r}_i)$ у (16). Для цього перейдемо в сферичну систему координат. Тоді доданок $I'_0(\mathbf{r}_i)$ можна подати у вигляді

$$I'_0 = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\tilde{\rho}^2 \sin \theta d\phi d\tilde{\rho} d\theta}{(A^2 + \tilde{\rho}^2 - 2A\tilde{\rho} \cos \theta)^{3/2}} = \frac{2\pi}{V} \int_0^R \tilde{\rho}^2 d\tilde{\rho} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(A^2 + \tilde{\rho}^2 - 2A\tilde{\rho} x)^{3/2}},$$

де R – радіус наночастинки.

Ввівши позначення $x = \cos \theta$, одержимо

$$I'_0(\mathbf{r}_i) = \frac{2\pi}{V} \int_0^R \tilde{\rho}^2 d\tilde{\rho} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(A^2 + \tilde{\rho}^2 - 2A\tilde{\rho} x)^{3/2}}.$$

Виконуючи математичні перетворення [6, 7] остаточно одержуємо вираз:

$$\frac{1}{V} \int_V \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{p}}|^3} = \frac{4\pi}{A \cdot V} \left[-R + \frac{A}{2} \ln \left(\frac{A+R}{A-R} \right) \right]. \quad (17)$$

Розглянемо перший доданок у (16)

$$I_0 = \frac{3}{V} \int_V \frac{(A_z - \tilde{\rho}_z)^2}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} d\tilde{\mathbf{\rho}} = \frac{3}{V} \int_V \frac{A_z^2 - 2A_z\tilde{\rho}_z + \tilde{\rho}_z^2}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^3} d\tilde{\mathbf{\rho}},$$

який подамо у вигляді суми інтегралів

$$I_0(\mathbf{r}_i) = \frac{3}{V} A_z^2 \int \frac{d\tilde{\mathbf{\rho}}}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} - \frac{6}{V} A_z \int \frac{\tilde{\rho}_z}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} d\tilde{\mathbf{\rho}} + \frac{3}{V} \int \frac{\tilde{\rho}_z^2}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} d\tilde{\mathbf{\rho}}. \quad (18)$$

Для зручності обчислення перейдемо в нову систему координат, в якій кут повороту γ задовольняє умову $0 \leq \gamma \leq \pi$, а одиничні вектори систем координат зв'язані такими співвідношеннями:

$$\mathbf{e}'_x = \frac{\mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}_z}{\sin \gamma}, \quad \mathbf{e}'_y = \frac{1}{\sin \gamma} [\mathbf{e}'_z \cos \gamma - \mathbf{e}_z]. \quad (19)$$

Радіус-вектор частинок у системі координат, зв'язаної з центром частинки, визначимо виразом

$$\tilde{\mathbf{\rho}} = \tilde{\rho} \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}'_x + \tilde{\rho} \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}'_y + \tilde{\rho} \cos \theta \mathbf{e}'_z.$$

Також для обчислення нам необхідно знати проекцію $\tilde{\mathbf{\rho}}$ на вісь Z – вісь четвертого порядку, яку визначимо в обраній системі координат таким чином:

$$\tilde{\rho}_z = \tilde{\mathbf{\rho}} \mathbf{e}_z = \tilde{\rho} \sin \theta \cos \phi (\mathbf{e}'_x \mathbf{e}_z) + \tilde{\rho} \sin \theta \sin \phi (\mathbf{e}'_y \mathbf{e}_z) + \tilde{\rho} \cos \theta (\mathbf{e}'_z \mathbf{e}_z),$$

Виконавши перетворення, одержуємо

$$\tilde{\rho}_z = -\tilde{\rho} \sin \theta \sin \phi \sin \gamma + \tilde{\rho} \cos \theta \cos \gamma. \quad (20)$$

Проведемо математичні перетворення [6, 8] у формулі (18) з урахуванням (19) і (20). Обчислення інтеграла в першому доданку

$$\int \frac{d\tilde{\mathbf{\rho}}}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\tilde{\rho}^2 \sin \theta d\theta d\tilde{\rho} d\phi}{(A + \tilde{\rho} - 2A\tilde{\rho} \cos \theta)^{5/2}}$$

дає значення

$$\int \frac{d\tilde{\mathbf{\rho}}}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} = V \frac{1}{A(A^2 - R^2)^2}.$$

Інтеграл у другому доданку виразу (18)

$$\int \frac{\tilde{\rho}_z}{|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{\rho}}|^5} d\tilde{\mathbf{\rho}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{-\tilde{\rho} \sin \theta \sin \phi \sin \gamma + \tilde{\rho} \cos \theta \cos \gamma}{(A + \tilde{\rho} - 2A\tilde{\rho} \cos \theta)^{5/2}} \tilde{\rho}^2 \sin \theta d\theta d\tilde{\rho} d\phi$$

дорівнює

$$\int \frac{\tilde{\rho}_z}{|\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{p}}|^5} d\tilde{\mathbf{p}} = \frac{4}{3} \pi \cos \gamma \left[\frac{R}{A^2} + \frac{A^2 R}{(A^2 - R^2)^2} - 2 \frac{R}{A^2 - R^2} \right].$$

Необхідно обчислити інтеграл виду

$$\int \frac{\tilde{\rho}_z^2}{|\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{p}}|^5} d\tilde{\mathbf{p}} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\tilde{\rho}^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \sin^2 \gamma + \tilde{\rho}^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma}{(A + \tilde{\rho} - 2A\tilde{\rho} \cos \theta)^{5/2}} \tilde{\rho}^2 \sin \theta d\theta d\tilde{\rho} d\phi,$$

який після нескладних математичних перетворень можна записати так:

$$\int \frac{\tilde{\rho}_z^2}{|\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{p}}|^5} d\tilde{\mathbf{p}} = \pi \int_0^R \tilde{\rho}^4 d\tilde{\rho} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \theta (3 \cos^2 \gamma - 1)}{(A^2 + \tilde{\rho}^2 - 2A\tilde{\rho} \cos \theta)^{5/2}} \sin \theta d\theta.$$

Виконуючи інтегрування, одержуємо

$$\int \frac{\tilde{\rho}_z^2}{|\mathbf{A}-\tilde{\mathbf{p}}|^5} d\tilde{\mathbf{p}} = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{2R}{A} \sin^2 \gamma + \frac{2R}{A} \cos^2 \gamma + \frac{2R^3}{A^3} \cos^2 \gamma - \frac{2R^3}{3A^3} - \right. \\ \left. - \frac{6AR}{A^2 - R^2} \cos^2 \gamma + \frac{2A^3 R}{(A^2 - R^2)^2} \cos^2 \gamma + \ln \frac{A+R}{A-R} \right].$$

Після підсумовування отриманих співвідношень згідно з (18), вираз (15) з урахуванням (16) буде дорівнювати

$$I(\mathbf{r}_i) = \frac{3A_z^2}{A(A^2 - R^2)^2} - \frac{1}{A^3} - 6A_z \frac{R^2}{A^2(A^2 - R^2)^2} \cos \gamma + \frac{3R^4}{A^3(A^2 - R^2)^2} \cos^2 \gamma. \quad (21)$$

Спростимо (21), враховуючи (16), а також $\cos \gamma = \frac{\mathbf{A} \mathbf{e}_z}{|\mathbf{A}|}$, $\cos \psi = \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r}_i|}$,

$$\rho_{iz} = -\rho_i \sin \theta \sin \phi \sin \psi + \rho_i \cos \theta \sin \psi.$$

Тоді вираз (21) можна записати у вигляді

$$I(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V} \int_V \left(\frac{3A_z^2}{A^5} - \frac{1}{A^3} \right) d\mathbf{p}_i. \quad (22)$$

Аналіз отриманого результату, показує, що вираз (22) має таку саму структуру, що і вираз (15). Це нам дає право провести усереднення за об'ємом i -ї частинки, враховуючи співвідношення (16). Виконуючи аналогічні математичні перетворення, ми одержимо точне значення для середнього дипольного магнітного поля. У відповідності з геометрією задачі середні значення проекції дипольного поля на осі x і y дорівнюють нулю, а z -а компонента середнього дипольного поля $H(t)$ має вигляд

$$H(t) = \left\langle \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{iz}^2 - |\mathbf{r}_i|^2}{|\mathbf{r}_i|^5} \overline{m_{iz}(t)} \right\rangle, \quad (23)$$

де індекс i нумерує наночастинки в решітці, а нульове значення відповідає виділеній частинці.

Для одержання виразу (23) ми скористалися дипольним наближенням. У зв'язку з цим деякий інтерес становить точність даного наближення. Для того, щоб з'ясувати чи є дане наближення достатньо точним, одержимо цей же вираз у квадрупольному наближенні. Розглянемо вираз (11) для середнього локального дипольного магнітного поля $H(t)$. Обчислення подвійного інтеграла виконаємо таким чином. Запишемо (12) у вигляді різниці інтегралів

$$I(\mathbf{r}_i) = I'(\mathbf{r}_i) - I''(\mathbf{r}_i),$$

де

$$I'(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \frac{3(r_{iz} + \rho_{iz} - \tilde{\rho}_z)^2}{|\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}|^5} d\boldsymbol{\rho}_i d\tilde{\boldsymbol{\rho}}; \quad I''(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \frac{d\boldsymbol{\rho}_i d\tilde{\boldsymbol{\rho}}}{|\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}|^3}.$$

Ввівши позначення $\mathbf{s} = \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}$, запишемо підінтегральний вираз у такому вигляді:

$$\frac{3(r_{iz} + \rho_{iz} - \tilde{\rho}_z)^2}{|\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}|^5} = \frac{3}{|\mathbf{r}_i|^5} \frac{r_{iz}^2 + 2r_{iz}s_z - s_z^2}{\left(1 + 2 \frac{r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z}{|\mathbf{r}_i|^2} + \frac{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}{|\mathbf{r}_i|^2}\right)^{5/2}},$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\rho}_i - \tilde{\boldsymbol{\rho}}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}_i|^3} \frac{1}{\left(1 + 2 \frac{r_x s_x + r_y s_y + r_z s_z}{|\mathbf{r}_i|^2} + \frac{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}{|\mathbf{r}_i|^2}\right)^{3/2}}.$$

Нарешті, скориставшись розкладаннями в ряд, подавши підінтегральні вирази, обмежуючись членами четвертого порядку, і, виконавши математичні перетворення, одержимо такі значення інтегралів:

$$I'(\mathbf{r}_i) = 3 \frac{r_{iz}^2}{|\mathbf{r}_i|^5} + \frac{6}{5} \frac{r_i^2}{|\mathbf{r}_i|^5} + \frac{1206}{35} \frac{r_i^4}{|\mathbf{r}_i|^7},$$

$$I''(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{|\mathbf{r}_i|^3} + \frac{6}{5} \frac{r_i^2}{|\mathbf{r}_i|^5} + \frac{1206}{35} \frac{r_i^4}{|\mathbf{r}_i|^7},$$

різниця яких визначає значення співвідношення (12)

$$I(\mathbf{r}_i) = \frac{3r_{iz}^2}{|\mathbf{r}_i|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r}_i|^3}.$$

Згідно з отриманим, вираз для середнього локального поля буде мати вигляд (13).

Прямокутна двовимірна решітка.

Припустимо, що частинки займають вузли двовимірної прямокутної решітки, легкі осі намагнічування лежать у площині $xу$, причому магнітний момент орієнтований уздовж осі y .

Запишемо компоненти поля $\mathbf{h}$ з урахуванням орієнтації магнітних моментів:

$$h_x = \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{xi} r_{yi}}{r_i^5} m_{yi},$$

$$h_y = \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{yi}^2 - r_i^2}{r_i^5} m_{yi},$$

$$h_z = \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{zi} r_{yi}}{r_i^5} m_{yi}.$$

Після проведення процедури усереднення у відповідності з геометрією задачі одержимо, що компоненти h_x та h_z дорівнюють нулю. Тоді середнє дипольне магнітне поле, визначаючи таким чином:

$$\mathbf{H}(t) = \langle \overline{\mathbf{h}(t)} \rangle,$$

де $\mathbf{h}(t)$ – локальне дипольне поле, діюче на довільно обрану частинку, можна подати так:

$$H(t) = \left\langle \sum_{i \neq 0} \frac{3r_{yi}^2 - r_i^2}{r_i^5} \overline{m_{yi}(t)} \right\rangle.$$

Висновки. Отриманий результат усереднення є точним, тобто в обраній моделі урахування взаємодії частинок у дипольному наближенні коректне, а вираз (23) для середнього дипольного магнітного поля має такий самий вигляд, як і у випадку точкових диполів.

Література.

1. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред. / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – М.: Наука, 1982. – 626 с.
2. Мишин Д.Д. Магнитные материалы. / Д.Д.Мишин – М.: Высшая школа, 1991. – 384 с.
3. Мицек А.И. Реальные кристаллы с магнитным порядком. / А.И.Мицек, В.Н.Пушкаръ – К.: Наукова думка, 1978. – 165 с.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. / В.И.Кляцкин – М.: Наука, 1980. – 336 с.
5. Stratonovich R.L. A new representation of stochastic integral and equations / Stratonovich R.L. // SIAM J. Control. – 1996. – Vol. 4, № 2. – P. 362-374.

- Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции. / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев – М.: Наука, 1983. – 750 с.
- Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С.Бугров, С.М.Никольский – М.: Наука, 1980. – 452 с.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С.Владимиров – М.: Наука, 1988. – 512 с.

УДК 621.671

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ МЕРИДИАННОГО РАВНОСКОРОСТНОГО И ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКОВ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Косторной С.Д., Чаплыгин А.А.

Постановка проблемы в общем виде. Для проектирования и гидродинамического анализа лопастных гидравлических машин задачи построения и расчета меридианного потенциального или равноскоростного потоков в проточной части должны быть решены.

Анализ последних исследований и публикаций. Имеется несколько приближенных методов их численного решения [1-3]. При практических расчетах для этих целей применяют универсальный расчетно-графический способ, который весьма трудоемок и в большинстве случаев не удовлетворяет требуемой точности.

Формулировка целей статьи (постановка задачи). В данной работе предлагаются точные методы расчета равноскоростного и потенциального потоков. Для равноскоростного потока применен метод на основе точного аналитического решения геометрических задач, принятых в основу определения равноскоростного потока, а для потенциального – метод гидродинамических особенностей [4]. Предлагаемые методы основаны на точных численных алгоритмах решения и реализованы на ЭВМ, что позволило автоматизировать процесс проектирования и заменить ручной труд конструктора машинным.

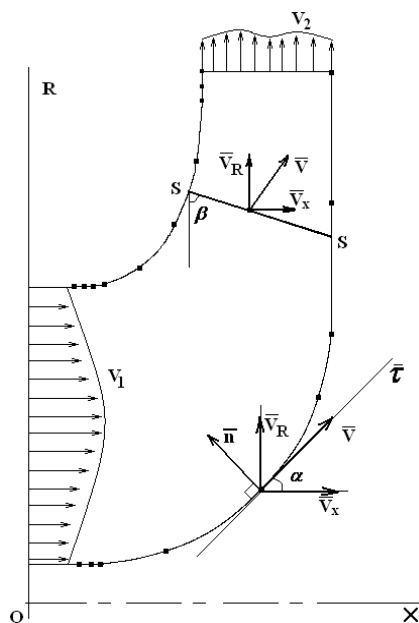


Рис.1. Расчетная схема

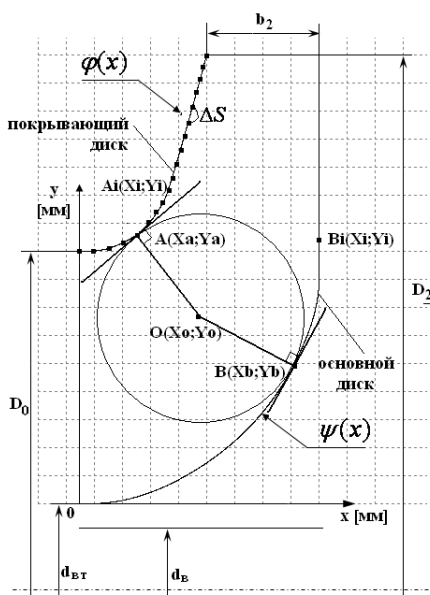


Рис.2. Меридианное сечение проточной части канала