

## НОВЫЙ МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НОРМАЛЬНЫХ РЕАКЦИЙ НА ОСЯХ АВТОМОБИЛЯ

**М. А. Подригало**, д.т.н., профессор, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

**Е. М. Гецович**, д.т.н., профессор, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

**М. В. Байцур**, к.т.н., доцент, Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

**В. В. Шелудченко**, к.т.н., доцент, Сумский национальный аграрный университет

*Предложен новый методический прием, позволяющий без составления уравнений кинестатики определить суммарные нормальные реакции дороги на осях автомобиля при движении в тяговом и тормозном режимах. Такой подход позволяет избежать ошибок, вызванных определением направления опрокидывающего момента в продольной плоскости автомобиля.*

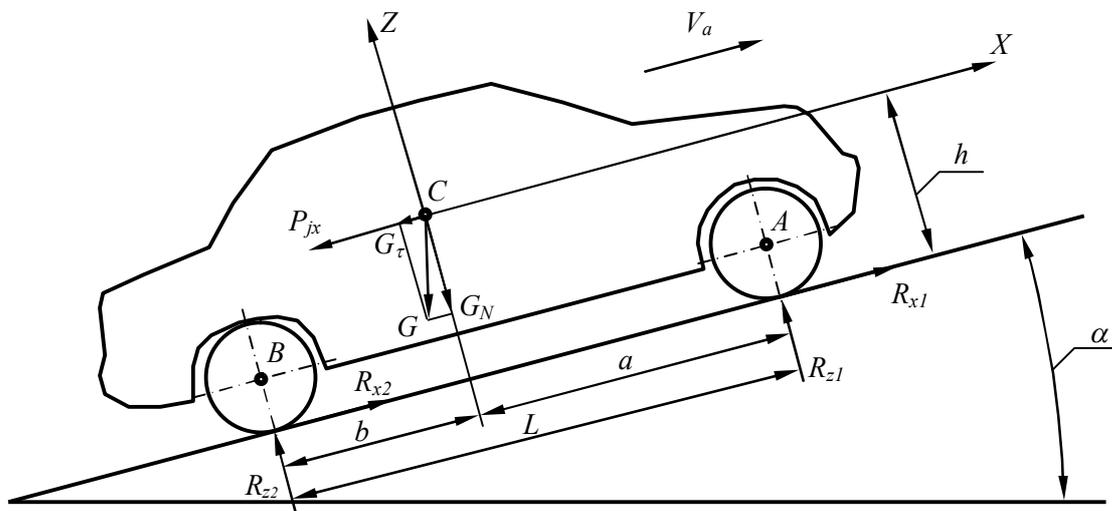
**Ключевые слова:** нормальные реакции дороги, принцип Германа-Д'Аламбера-Эйлера, сумма моментов сил, центр масс автомобиля.

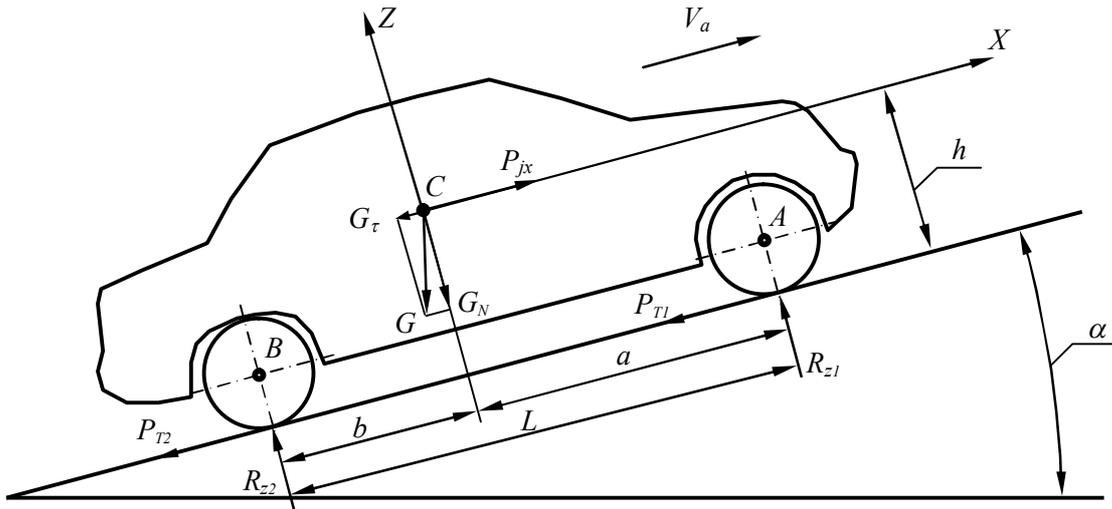
**Постановка проблемы.** Принцип Германа-Д'Аламбера-Эйлера получил широкое распространение при решении задач динамики автомобиля. Однако при рассмотрении поступательного движения автомобиля можно определять суммарные нормальные реакции дороги на передней и задней осях, используя уравнения статики, поскольку автомобиль имеет только одну степень свободы (в направлении своей продольной оси). В направлении оси, перпендикулярной опорной поверхности дороги, автомобиль находится в равновесии (при допущении абсолютно жесткой подвески). Во

вращательном движении в продольной плоскости он также находится в равновесии.

В настоящей статье предложен новый методический подход, позволяющий решать поставленную задачу путем составления уравнений статики.

**Анализ публикаций.** В классической литературе по теории эксплуатационных свойств автомобилей [1–6] при определении суммарных нормальных реакций на передних и задних колесах в тяговом и тормозном режимах используется принцип Германа-Д'Аламбера-Эйлера (рис. 1).





б

Рис. 1. Классическое представление схемы сил, действующих на автомобиль:  
а – в тяговом режиме; б – в тормозном режиме

Для определения нормальных реакций в работах [1–6], прикладывая в центре масс  $C$  силу инерции  $P$  поступательного движения автомобиля в направлении оси  $CX$ , составляют уравнения кинестатики. Из условия квазистатического равновесия относительно точек  $A$  и  $B$  получают уравнения в тяговом режиме:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= G_N \cdot a + (P_{jx} + G_\tau)h - R_{z2} \cdot L = 0 \\ \sum M_B &= R_{z1} \cdot L + (P_{jx} + G_\tau)h - G_N \cdot b = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

и в тормозном режиме

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= G_N \cdot a - (P_{jx} - G_\tau)h - R_{z2} \cdot L = 0 \\ \sum M_B &= R_{z1} \cdot L - (P_{jx} - G_\tau)h - G_N \cdot b = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  – расстояние от передней и задней осей автомобиля до проекции центра масс на горизонтальную плоскость, проходящую через эти оси (рис. 1);

$G_N$  и  $G_\tau$  – нормальная и касательная компоненты силы тяжести  $G$  автомобиля (рис. 1);  
 $h$  и  $L$  – высота центра масс и продольная колесная база автомобиля;

$P_{jx}$  – сила инерции автомобиля,

$$P_{jx} = -m_a \frac{dV_a}{dt}, \quad (3)$$

где  $V_a$  – линейная скорость автомобиля в направлении оси  $CX$ ;

$\frac{dV_a}{dt}$  – ускорение автомобиля в

направлении оси  $CX$ ;

$m_a$  – общая масса автомобиля.

Учитывая соотношения

$$G_N = G \cos \alpha; \quad (4)$$

$$G_\tau = G \sin \alpha; \quad (5)$$

в тяговом режиме

$$m_a \frac{dV_a}{dt} = R_{x1} + R_{x2} - G \sin \alpha; \quad (6)$$

в тормозном режиме

$$P_{jx} = P_{T1} + P_{T2} = P_T, \quad (7)$$

из уравнений (1),(2) определяют суммарные нормальные реакции дороги на передних и задних колесах в тяговом режиме

$$\left. \begin{aligned} R_{z1} &= G \left( \frac{b}{L} \cos \alpha - \frac{R_{x1} + R_{x2}}{G} \right) \frac{h}{L} \\ R_{z2} &= G \left( \frac{a}{L} \cos \alpha + \frac{R_{x1} + R_{x2}}{G} \right) \frac{h}{L} \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

и в тормозном режиме

$$\left. \begin{aligned} R_{z1} &= G \left( \frac{b}{L} \cos \alpha + \frac{P_T h}{G L} \right) \\ R_{z2} &= G \left( \frac{a}{L} \cos \alpha - \frac{P_T h}{G L} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где  $P_T$  – общая тормозная сила автомобиля.

Такой подход к определению суммарных нормальных реакций на осях автомобиля предполагает использование уравнений кинестатики, что неоправданно усложняет процесс решения задачи. Кроме того, это может приводить к ошибкам при решении уравнений. Например, при подстановке уравнения (3) в выражения (1) – (2) сохраняется знак «минус» в его правой части, хотя на расчетной схеме (рис. 1) этот знак уже учтен при выборе направления силы  $P_{jx}$ .

В работе [7] нами показано, что тяговые силы на ведущих колесах и тормозные силы на незаблокированных колесах необходимо прикладывать не в пятне контакта с дорогой, а на оси. Это приводит к результатам, отличающимся

от известных [1– 6].

Определение суммарных нормальных реакций на передних и задних колесах автомобиля в тяговом и тормозном режимах можно осуществить более простым способом, путем составления уравнений статики.

**Изложение основного материала.** Схема сил, действующих на автомобиль в тяговом и тормозном режимах с учетом изменения точки

$$\sum M_C = (P_{K2} - P_{f2})(h - r_{\partial 2}) - R_{z2} \cdot b + R_{z1} \cdot a + (P_{K1} - P_{f1})(h - r_{\partial 1}) = 0 \quad (10)$$

Уравнение равновесия автомобиля при поступательном движении вдоль оси CZ выражается равенством нулю суммы проекций всех сил на эту ось

$$\sum P_{iz} = R_{z1} + R_{z2} - G \cos \alpha \quad (11)$$

Решение системы уравнений (10) и (11), полученное с учетом соотношений

$$P_{f1} = f \cdot R_{z1}; \quad (12)$$

$$P_{f2} = f \cdot R_{z2}, \quad (13)$$

выглядит следующим образом

$$R_{z1} = \frac{G \cos \alpha \left( \frac{b}{L} + f \frac{h - r_{\partial 2}}{L} \right) - P_{K1} \frac{h - r_{\partial 1}}{L} + P_{K2} \frac{h - r_{\partial 2}}{L}}{1 + f \frac{r_{\partial 1} - r_{\partial 2}}{L}} \quad (14)$$

приложения тяговых и тормозных сил, представлена на рис. 2.

Автомобиль находится в статическом равновесии по двум из трех возможных степеней подвижности при плоском движении (рис. 2).

Уравнение равновесия автомобиля во вращательном движении в продольной плоскости, выражено равенством нулю моментов всех сил относительно центра масс:

$$R_{z2} = \frac{G \cos \alpha \left( \frac{a}{L} - f \frac{h - r_{\partial 1}}{L} \right) - P_{K1} \frac{h - r_{\partial 1}}{L} + P_{K2} \frac{h - r_{\partial 2}}{L}}{1 + f \frac{r_{\partial 1} - r_{\partial 2}}{L}} \quad (15)$$

При  $r_{\partial 2} = r_{\partial 1} = r_{\partial}$  уравнения (14) и (15) примут вид

$$R_{z1} = G \cos \alpha \left( \frac{b}{L} + f \frac{h - r_{\partial}}{L} \right) - P_K \frac{h - r_{\partial}}{L}; \quad (16)$$

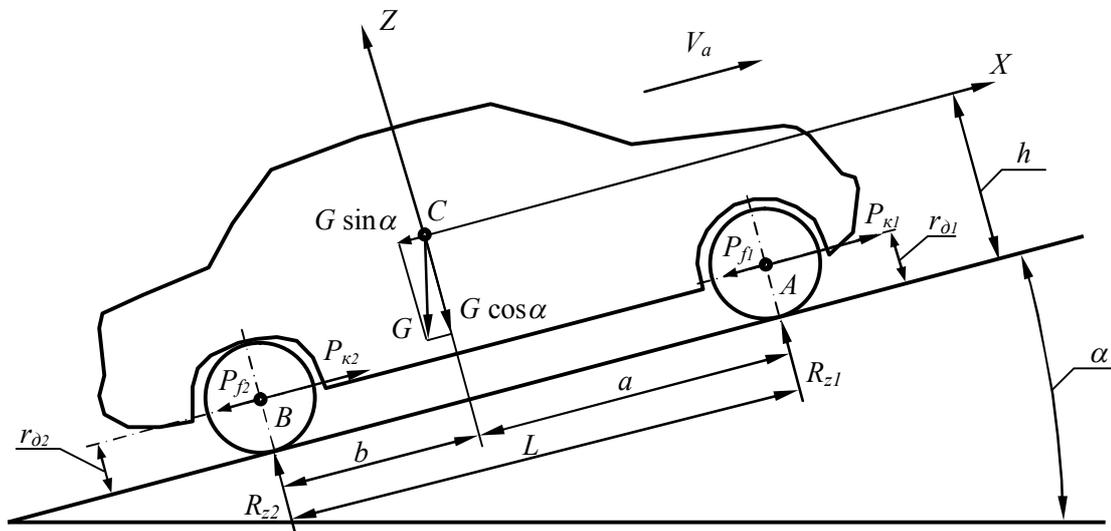
$$R_{z2} = G \cos \alpha \left( \frac{a}{L} - f \frac{h - r_{\partial}}{L} \right) + P_K \frac{h - r_{\partial}}{L}, \quad (17)$$

где  $P_K$  – общая тяговая сила автомобиля,

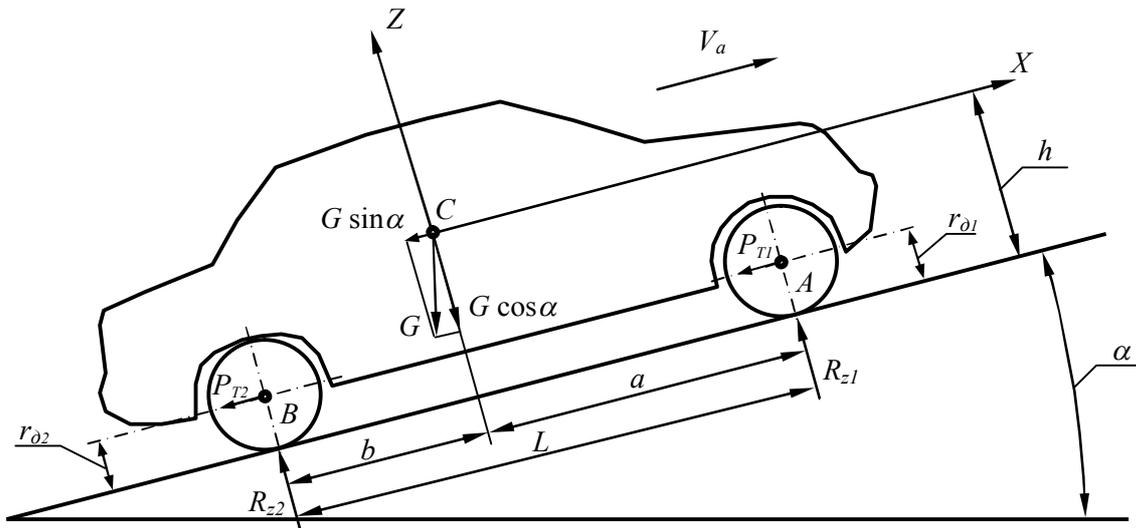
$$P_K = P_{K1} + P_{K2}. \quad (18)$$

В тормозном режиме при отсутствии блокирования колес уравнение (10) примет вид:

$$\sum M_C = R_{z1} \cdot a - P_{T2}(h - r_{\partial 2}) - R_{z2} \cdot b - P_{T1}(h - r_{\partial 1}) = 0 \quad (19)$$



а



б

Рис. 2. Схема сил, действующих на автомобиль:  
а – в тяговом режиме; б – в тормозном режиме при незаблокированных колесах

Решая систему уравнений (11) и (19), получим

$$R_{z1} = \frac{b}{L} G \cos \alpha + P_{T1} \frac{h - r_{d1}}{L} + P_{T2} \frac{h - r_{d2}}{L}; \quad (20)$$

$$R_{z2} = \frac{a}{L} G \cos \alpha - P_{T1} \frac{h - r_{d1}}{L} - P_{T2} \frac{h - r_{d2}}{L}. \quad (21)$$

При  $r_{d2} = r_{d1} = r_d$  уравнения (20) и (21) примут вид

$$R_{z1} = \frac{b}{L} G \cos \alpha + P_T \frac{h - r_d}{L}; \quad (22)$$

$$R_{z2} = \frac{a}{L} G \cos \alpha - P_T \frac{h - r_d}{L}, \quad (23)$$

где  $P_T$  – общая тормозная сила

$$P_T = P_{T1} + P_{T2}. \quad (24)$$

**Выводы.** Полученные аналитические уравнения позволяют определять суммарные нормальные реакции на передних и задних осях автомобиля в тяговом и тормозном режимах путем из уравнений статики. Методический подход, применяемый при составлении уравнений статического равновесия позволяет избежать ошибок, нередко возникающих при использовании принципа Германа-Д'Аламбера-Эйлера. Представленные аналитические выражения получены с учетом приложения тормозных и тяговых сил автомобиля к его осям и позволяют учитывать разность динамических радиусов передних и задних колес.

### **Список использованной литературы:**

1. Чудаков Е.А. Теория автомобиля / Е.А.Чудаков. – М.: Машгиз, 1950. – 343 с.
2. Зимелев Г.В. Теория автомобиля / Г.В. Зимелев. – М.: Машгиз, 1959. – 312 с.
3. Фалькевич Б.С. Теория автомобиля / Б.С.Фолькевич. – М.: Машгиз, 1963. – 239 с.
4. Вопросы динамики торможения и рабочих процессов тормозных систем автомоиблей / [Б.Б.Генбом, Г.С.Гудз, В.А.Демьянюк и др.]; под ред. Б.Б. Генбома. – Львов: Вища школа, 1974. – 234 с.
5. Булгаков Н.А. Исследование динамики торможения автомобиля / Н.А.Булгаков, А.Б.Гредескул, С.И.Ломака// Научное сообщение №18. – Харьков: Изд-во Харьковского госуниверситета, 1962. – 36 с.
6. Волков В.П. Теорія експлуатаційних властивостей автомобіля. Навчальний посібник. – Харків: ХНАДУ, 2003. – 292 с.
7. Подригало М.А. Новое в теории эксплуатационных свойств автомобилей и тракторов / М.А.Подригало. – Харьков: Академия ВВ МВД Украины, 2013. – 222 с.

### ***Подригало М.А., Байцур М.В., ШелудченкоВ.В. Новый методичний підхід до визначення нормальних реакцій на осях автомобіля***

*Запропоновано новий методичний прийом, що дозволяє без складання рівнянь кінестатики визначити сумарні нормальні реакції дороги на осях автомобіля при русі в тяговому та гальмівному режимах. Такий підхід дозволяє уникнути помилок, що викликані визначенням напряму перекидаючого моменту в поздовжній площині автомобіля.*

**Ключові слова:***нормальні реакції дороги, принцип Германа-Д'аламбера-Ейлера, сума моментів сил, центр мас автомобіля.*

### ***Podrigalo M., BaytsurM., SheludchenkoV. The new methodical approach to definition of normal reactions on the car's axis***

*The new methodical reception that allowing without drawing up the kinetostatics equations to determine sum of normal reactions of road on the car's axis at movement in modes of traction and braking is offered. Such approach allows to avoid the errors caused by definition of a direction of the capsizing moment in a longitudinal plane of the car.*

*Analytical equations allow to determine the total normal reaction on the front and rear axles of the vehicle in traction and braking modes by means of the equations of statics. The methodological approach used in the preparation of the equations of static equilibrium allows us to avoid the mistakes that often occur when you use the principle of Hermann-D'alembert-Euler. Presents analytical expressions are derived taking into account the application of the brake and the traction force of the vehicle to its axis and allows to account for the difference of dynamic radiuses of the front and rear wheels.*

**Keywords:***normal reactions of road, Hermann-D'alembert-Euler principle, a sum moment of forces, the center of the car's weights.*

Стаття надійшла в редакцію: 22.04.2015р.

Рецензент: д.т.н., проф.Топілін Г.Є.