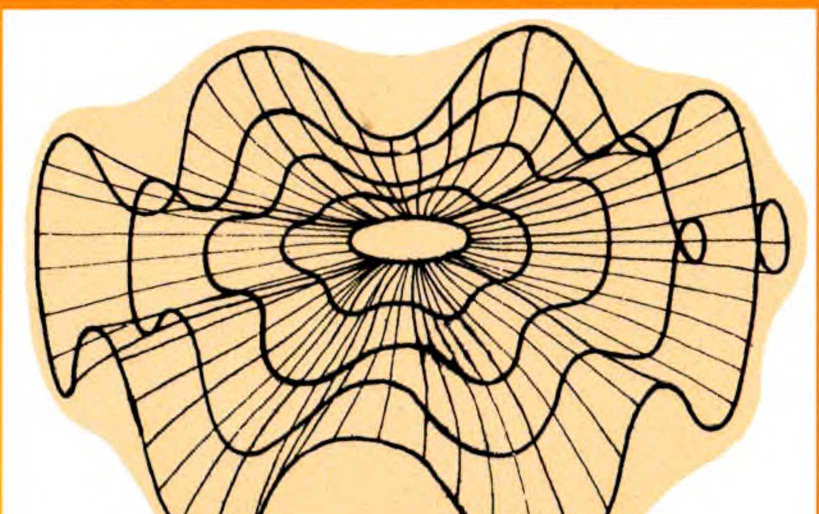
ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА

2016 ВИПУСК 93



УДК 514.18

Т.М. Захарова, к.т.н.

УЗАГАЛЬНЕНІ ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Сформульовано підхід до конструювання просторових кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, на основі узагальнених параметричних рівнянь просторових кривих у функції довжини власної дуги. Візуалізовано криві, отримані за допомогою запропонованого підходу, із зазначенням їх натуральних рівнянь та параметричних рівнянь у функції натурального параметра.

Постановка проблеми. Серед різноманіття формоутворення просторових кривих особливе місце займають криві, описані натуральними або параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги. Такі рівняння зручно використовувати, коли довжина дуги кривої є інваріантом її перетворення. Існує багато задач, для розв'язання яких доцільно застосовувати саме таку форму запису кривих [1, 2]. У науковій літературі з теорії просторових кривих наведено деякі криві, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра. Наприклад, до них відносяться гвинтова лінія, інші криві укосу, деякі сферичні лінії. Проте множина кривих, заданих у такому вигляді, є досить обмеженою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Науковцями розробляються підходи до конструювання просторових кривих у функції натурального параметра для розширення класу таких кривих. Так, у [3] для цього авторами використовуються плоскі ізометричні сітки, а у [4] – супровідний тригранник Френе. Праця [5] висвітлює конструювання просторових кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання, а [6] – на поверхні псевдосфери. Проте на даний час не існує узагальненого підходу до конструювання просторових кривих у функції довжини власної дуги.

Формулювання цілей та завдання статті. Розширити клас просторових кривих у функції натурального параметра за допомогою розробки способу їх конструювання на основі узагальнених параметричних рівнянь просторових кривих у функції довжини власної дуги.

Основна частина. Якщо просторова крива задана параметричними рівняннями $x=x(s);\ y=y(s);\ z=z(s)$, де s – довжина власної дуги (натуральний параметр), то повинна виконуватися рівність:

$$x'^2+y'^2+z'^2=1. \tag{1}$$

Рівність (1) завжди буде виконуватися, якщо ми дві функції $\alpha=\alpha(s)$ і $\beta=\beta(s)$ включимо у наступні параметричні рівняння:

$$x=\int\cos\alpha\cos\beta\,ds;\quad y=\int\cos\alpha\sin\beta\,ds;\quad z=\int\sin\alpha\,ds. \tag{2}$$

Рівняння (2) дають можливість конструювати просторову криву, описану параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги за наявності таких функцій $\alpha=\alpha(s)$ і $\beta=\beta(s)$, які дозволяють інтегрування виразів (2). Для кривих, представлених параметричними рівняннями (2), можна знайти натуральні рівняння кривини $k=k(s)$ і скруту $\sigma=\sigma(s)$ в загальному вигляді. Для цього знайдемо перші, другі і треті похідні рівнянь (2):

$$\begin{aligned}
&x'=\cos\alpha\cos\beta; && x''=-\alpha'\sin\alpha\cos\beta-\beta'\cos\alpha\sin\beta;\\
&y'=\cos\alpha\sin\beta; && y''=\beta'\cos\alpha\cos\beta-\alpha'\sin\alpha\sin\beta;\\
&z'=\sin\alpha. && z''=\alpha'\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{3}$$

$$x'''=\sin\beta\left(2\alpha'\beta'\sin\alpha-\beta''\cos\alpha\right)-\cos\beta\left[\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)\cos\alpha+\alpha''\sin\alpha\right];$$
$$y'''=\cos\beta\left(\beta''\cos\alpha-2\alpha'\beta'\sin\alpha\right)-\sin\beta\left[\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)\cos\alpha+\alpha''\sin\alpha\right];$$
$$z'''=\alpha''\cos\alpha-\alpha'^2\sin\alpha.$$

Кривину і скрут знаходимо за відомими формулами:

$$k=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2\cos^2\alpha}; \tag{4}$$

$$\sigma=\frac{\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}}{x''^2+y''^2+z''^2}=\frac{\beta'\left(2\alpha'^2+\beta'^2\cos^2\alpha\right)\sin\alpha+\left(\alpha''\beta'-\alpha'\beta''\right)\cos\alpha}{\alpha'^2+\beta'^2\cos^2\alpha}.$$

Розглянемо приклад. Задамо функції $\alpha=\alpha(s)$ і $\beta=\beta(s)$ у наступному вигляді:

$$\alpha=a\cdot s;\qquad \beta=b\cdot s. \tag{5}$$

Підстановкою (5) у (2) із наступним інтегруванням отримаємо параметричні рівняння просторових кривих у функції натурального параметра:

$$x=\frac{a\cos(bs)\sin(as)-b\cos(as)\sin(bs)}{a^2-b^2};$$
$$y=\frac{b\cos(as)\cos(bs)+a\sin(as)\sin(bs)}{a^2-b^2};\quad z=-\frac{\cos(as)}{a}. \tag{6}$$

Для отриманих рівнянь виконується рівність (1), що свідчить про правильність отриманих результатів. Для знаходження кривини і скруту за виразами (4) диференціюємо функції (5): $\alpha'=a;\ \beta'=b;\ \alpha''=\alpha'''=\beta''=\beta'''=0$. Підстановка отриманих похідних в (4) дає:

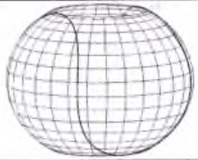
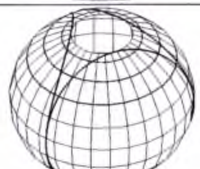
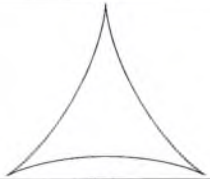
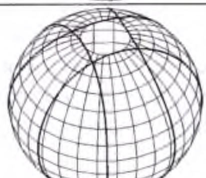
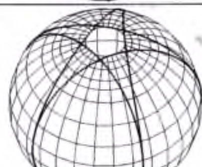
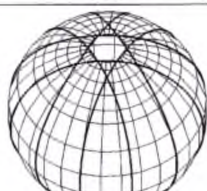
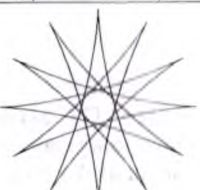
$$k=\sqrt{a^2+b^2\cos^2 as}. \tag{7}$$
$$\sigma=\frac{b\left(2a^2+b^2\cos^2 as\right)\sin as}{a^2+b^2\cos^2 as}.$$

У статті [7] авторами було знайдено рівняння (7) за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої.

У таблицях 1 і 2 наведені отримані криві (6) при різних співвідношеннях a/b. Дослідження показали, що при $a›k$ проекціями усіх просторових кривих на горизонтальну площину є гіпоциклоїди (табл. 1), зокрема астроїда і крива Штейнера як їх частковий випадок. Окрім того, якщо співвідношення *a/b* є числом непарним, то утворена горизонтальна проекція має стільки ж вузлових точок. Якщо ж дане співвідношення є числом парним, то кількість вузлових точок горизонтальної проекції подвоюється. При *a‹b* проекціями просторових кривих на горизонтальну площину є епіциклоїди (табл. 2).

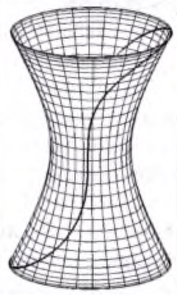
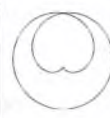
Таблиця 1

Криві (5), описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра, при *a›b*

a/b	Крива в аксонометрії	Проекція на горизонтальну площину
$\frac{a}{b}=\pm 2$		
$\frac{a}{b}=\pm 3$		
$\frac{a}{b}=\pm 4$		
$\frac{a}{b}=\pm 5$		
$\frac{a}{b}=\pm 6$		

Таблиця 2

Криві (5), описані параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги, при *a‹k*

b/a	$\frac{b}{a}=\pm 2$	$\frac{b}{a}=\pm 3$	$\frac{b}{a}=\pm 4$	$\frac{b}{a}=\pm 5$	$\frac{b}{a}=\pm 6$
Крива в аксонометрії					
Проекція на горизонтальну площину					

Отже, при лінійних залежностях $\alpha=\alpha(s)$ та $\beta=\beta(s)$ було отримано дві групи просторових кривих, розташованих на певних поверхнях обертання. Для однієї групи (табл. 1) ця поверхня близька до кулі, для іншої (табл. 2) – до гіперболоїда обертання. Параметричні рівняння меридіану поверхні обертання, спільні для обох поверхонь, мають вигляд:

$$\rho=\frac{a^2+b^2-\left(a^2-b^2\right)\cos(2as)}{\left(a^2-b^2\right)\sqrt{2}}; \qquad z=-\frac{\cos(as)}{a}. \tag{8}$$

Його форма залежить від співвідношення сталих *a* і *b* залежностей α і β.

Висновки. Узагальнені параметричні рівняння просторової кривої у функції натурального параметра дають можливість значно розширити клас просторових кривих, описаних такими рівняннями. Отримані за допомогою запропонованого підходу криві можна застосовувати для розв'язання ряду практичних задач, які потребують їх задання параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги.

Література

1. *Анпілогова В.О.* Моделювання кривих ліній за допомогою управляючих ламаних, що визначають їх натуральні рівняння / В.О. Анпілогова, С.І. Ботвіновська, А.Г. Анпілогов // Прикл. геометрія та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 124 – 129.

2. *Бадаєв С.Ю.* Інтегральні криві із заданим законом кривини / С.Ю. Бадаєв // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Том 18. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – С. 132 – 134.

3. *Пилипака С.Ф.* Конструювання кривих у функції натурального параметра на основі плоских ізометричних сіток / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 50. – С. 29 – 35.

4. *Пилипака С.Ф.* Конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 176 – 184.

5. *Пилипака С.Ф.* Геометрія кривих на поверхні псевдосфери, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // «Наукові доповіді НУБіП 2012–7 (36).

6. *Войтюк Д.Г.* Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Збірник наукових праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва». – К.: НАУ, 2001. – Т. 10. – С. 74–78.

7. *Захарова Т.М.* Конструювання просторових кривих, що описуються рівняннями у функції довжини дуги, за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої / Тетяна Миколаївна Захарова // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4, т.57. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – С. 104–112.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ В ФУНКЦИИ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Т.Н. Захарова

Сформулирован подход к конструированию пространственных кривых, описанных параметрическими уравнениями в функции натурального параметра, на основе обобщенных параметрических уравнений пространственных кривых в функции длины собственной дуги. Визуализированы кривые, полученные с помощью предложенного подхода, с приведением их натуральных уравнений и параметрических уравнений в функции натурального параметра.

UNIVERSAL PARAMETRICAL EQUATIONS OF SPATIAL CURVES IN THE FUNCTION OF NATURAL PARAMETER

T. Zakharova

Constructing of spatial curves, described by the parametrical equations in the function of natural parameter, on the basis of the generalized parametrical equations of spatial curves in the function of length of own arc are formulated in the article. Visualization of the got curves was carried out. It's natural and parametrical equations in the function of natural parameter were resulted.

УДК 514.18

Є.В. Конопацький, к.т.н.,
А.І. Бумага,
М.Г. Каплянок,
В.О. Лебедєв, к.т.н.

ТОЧКОВЕ РІВНЯННЯ ДУГИ КРИВОЇ 2-ГО ПОРЯДКУ, ЯКА ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ П'ЯТЬ НАПЕРЕД ЗАДАНИХ ТОЧОК

Мелітопольська школа прикладної геометрії
Донбаська національна академія будівництва і архітектури
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького, Україна

В статті запропонована геометрична схема конструювання дуги кривої 2-го порядку. На її основі отримано точкове рівняння дуги кривої 2-го порядку, яка проходить через п'ять наперед заданих точок.

Постановка проблеми. Для геометричного моделювання багато параметричних явищ і процесів у БН-численні важливо мати рівняння дуг кривих, які проходять через наперед задані точки. З іншого боку, криві 2-го порядку ефективно використовуються для геометричного моделювання зважаючи на їх простоту і передбачуваності форми. З проективної геометрії [1] відомо, що крива 2-го порядку однозначно визначається: п'ятьма точками, п'ятьма дотичними або їх комбінаціями. Але для практичного використання цих кривих потрібен їх аналітичний опис, який дозволяє програмну реалізацію. Тому визначення дуг кривих 2-го порядку методами БН-числення дозволить розширити можливості теорії кривих 2-го порядку і збагатити інструментарій БН-числення як апарату геометричного моделювання. Так використання дуги кривої 2-го порядку, яка проходить через п'ять точок, дозволить отримувати адекватні геометричні моделі явищ і процесів, які складаються з п'яти точок.

Аналіз останніх досліджень. Аналітичне визначення дуг алгебраїчних кривих у БН-численні було досліджено у [2]. Також у роботі [2] була запропоновано геометрична схема і точкове рівняння дуги кривої 2-го порядку, яка визначається трьома точками і двома дотичними. Але такий підхід з одного боку дозволяє отримати дугу обводу, а з іншого – зменшує кількість точок, які можна використати для геометричного моделювання явищ і процесів.

Визначення дуг кривих 2-го порядку у різноманітних параметризаціях методами БН-числення було досліджено у [3]. У цій же роботі було запропоновано геометричний алгоритм конструювання дуги кривої 2-го порядку, яка проходить через п'ять наперед заданих точок, і отримано точкове рівняння дуги кривої 2-го порядку. Однак, обрана в роботі [3] параметризація дуги кривої 2-го порядку, дуже ускладнює практичне використання отриманого рівняння.

В даній роботі пропонується інший геометричний алгоритм конструювання дуги кривої 2-го порядку, яка проходить через п'ять наперед заданих точок, для реалізації якого використовується математичний апарат геометричного моделювання – БН-числення [4-6].

Віддруковано ПАТ "ВІПОЛ". 03151, Київ, вул. Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 4404 від 31.08.2012 р.
Зам. 16-525.