НАУКОВО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

УДК 621.224

АНАЛІЗ АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ ЗАМКНЕНИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТІ ПРИ ВІДРИВНОМУ ОБТІКАННІ ТІЛ

Н. С. Борозенець
В. І. Пугач
Сумський національний аграрний університет

В статті розглянутий алгоритм розв'язування частково згладжених локально-індивідуальним способом на основі методу найменших квадратів рівнянь Нав'є-Стокса.

***Ключові слова:** турбулентний потік, осереднені рівняння, рівняння Нав'є-Стокса, рівняння Рейнольдса, швидкість, тиск.*

Аналіз останніх досліджень та постановка проблеми. Відомо, що всі потоки рідин і газів діляться на два типи, що різко відрізняються один від одного: спокійні і плавні потоки, які називаються ламінарними, і їхня протилежність - так звані турбулентні потоки, при яких швидкість, тиск, температура та інші гідродинамічні величини безладно пульсують, дуже нерегулярно змінюючись у просторі і в часі. Складний характер коливань швидкості і температури при турбулентному потоці, безліч пульсацій різних періодів і амплітуд, ілюструють складну внутрішню структуру турбулентних потоків, які різко відрізняються в цьому відношенні від ламінарних потоків.

Складна структура турбулентного потоку позначається на багатьох його властивостях, які дуже відрізняються в ламінарному і турбулентному випадках. Так, турбулентні потоки мають набагато більшу здатність до передачі кількості руху (образно кажучи, турбулентне середовище має величезну ефективну в'язкість) і тому в багатьох випадках роблять набагато більший силовий вплив на тверді тіла, що обтікаються рідиною. Також турбулентні потоки мають підвищену здатність до передачі тепла і пасивних домішок, до поширення хімічних реакцій, до переносу зависаючих частинок. Завдяки наявності внутрішніх неоднорідностей турбулентні потоки здатні розсіювати звукові та електромагнітні хвилі, які проходять через рідину чи газ, і викликати флуктуації їхніх амплітуд, фаз і т.п.

Переважна більшість потоків, які реально зустрічаються в природі і техніці є саме турбулентними. Ламінарні потоки являють собою досить рідкісне явище. Тому зрозуміло, що перелічені властивості турбулентних потоків можуть бути потрібними при вирішенні багатьох задач природознавства і техніки. Отже, питання про те, як часто зустрічаються турбулентні потоки, представляє безсумнівний практичний і теоретичний інтерес.

Вважається, що нестаціонарні рівняння Нав'є-Стокса цілком описують турбулентні потоки. Однак не можна розрахувати турбулентні потоки настільки ж точно, як і ламінарні. Існує розходження в думках відносно того, коли комп'ютерна техніка досягне у своєму розвитку етапу, на якому розрахунки турбулентних потоків можна буде проводити більш ефективно. Дехто вважає, що ніколи не вдасться розрахувати дрібномасштабну структуру турбулентності на основі нестаціонарних рівнянь Нав'є-Стокса в задачах, що представляють практичний інтерес.

На сьогоднішній день основний напрямок чисельних методів розрахунку турбулентних потоків полягає в розв'язанні осереднених рівнянь Нав'є-Стокса. Ці рівняння називають також рівняннями Рейнольдса. Рівняння Рейнольдса не випливають повністю з основних принципів законів збереження: маси, кількості руху й енергії, бо для замкнення системи рівнянь залучаються додаткові гіпотези.

Мета статті. Метою цієї роботи є показ одного з можливих методів розв'язання системи осереднених рівнянь Нав'є-Стокса, так зване локально-індивідуальне згладжування, яке засноване на методі найменших квадратів.

Всі існуючі моделі турбулентності мають недоліки. Остаточна модель турбулентності ще не створена. При вивченні турбулентності природно вважати компоненти швидкостей і тиск випадковими величинами в розумінні теорії імовірностей [1]. Будемо вважати, що майже всі траєкторії названих випадкових величин задовольняють рівняння Нав'є-Стокса. При практичному застосуванні такого підходу бажано одержати середні характеристики цих випадкових величин чи оцінки для них. Для цього потрібно усереднити рівняння Нав'є-Стокса і потім із осереднених (згладжених) рівнянь намагатися отримати шукані характеристики.

Представимо компоненти швидкостей і тиск у турбулентному потоці у вигляді:

$$W_x = \overline{W}_{x_0} + W'_{x_0} + V_x,$$
$$W_y = \overline{W}_{y_0} + W'_{y_0} + V_y,$$
$$W_z = \overline{W}_{z_0} + W'_{z_0} + V_z,$$
$$p = \overline{p}_0 + p'_0 + p^*,$$

де перші два доданки в правих частинах

цих рівностей відносяться до ідеальної рідини, риска означає осереднення, штрих - флуктуації, треті доданки - узяті додатки. Як показано в роботах [2, 3] система рівнянь Нав'є-Стокса в цьому випадку набуває виду

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial \overline{W}_{x_0}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \overline{W}_{x_0}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \overline{W}_{x_0}}{\partial z}+\overline{W}_{x_0}\frac{\partial v_x}{\partial x}+\overline{W}_{y_0}\frac{\partial v_x}{\partial y}+\overline{W}_{z_0}\frac{\partial v_x}{\partial z}=\nu\Delta v_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x}-r_x, \tag{1}$$

де

$$r_x=v_x\frac{\partial W'_{x_0}}{\partial x}+v_y\frac{\partial W'_{x_0}}{\partial y}+v_z\frac{\partial W'_{x_0}}{\partial z}+W'_{x_0}\frac{\partial v_x}{\partial x}+W'_{y_0}\frac{\partial v_x}{\partial y}+W'_{z_0}\frac{\partial v_x}{\partial z}. \tag{2}$$

Аналогічно записуються рівняння для W_y і W_z.

Нехай $W'_{x_0}, W'_{y_0}, W'_{z_0}, v_x, v_y, v_z, p_0, p^*$ - випадкові величини з диференційовними траєкторіями, причому

$$M(W'_{x_0})=M(W'_{y_0})=M(W'_{z_0})=M(p'_0)=0,$$

де *M* означає символ математичного сподівання. Припустимо, що $W'_{x_0}, W'_{y_0}, W'_{z_0}, p'$ не залежать від v_x, v_y, v_z, p^*, тоді з визначення r_x (2) отримаємо *M(r_x)=0* .

Обчисливши математичне сподівання в обох частинах рівняння (1), отримаємо

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial \overline{W}_{x_0}}{\partial x}+V_y\frac{\partial \overline{W}_{x_0}}{\partial y}+V_z\frac{\partial \overline{W}_{x_0}}{\partial z}+\overline{W}_{x_0}\frac{\partial V_x}{\partial x}+\overline{W}_{y_0}\frac{\partial V_x}{\partial y}+\overline{W}_{z_0}\frac{\partial V_x}{\partial z}=\nu\Delta V_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},, \tag{3}$$

де

$$V_x=M(v_x), V_y=M(v_y), V_z=M(v_z), p=M(p^*).$$

Функції $W_{x_0}, W_{y_0}, W_{z_0}$ замінені в цьому рівнянні їх згладженими варіантами, тобто

$$\overline{W}_{x_0}=\sum_{k=0}^{s}C_k^{(1)}(x,y)t^k,$$

$$\overline{W}_{y_0}=\sum_{k=0}^{s}C_k^{(2)}(x,y)t^k,$$

$$\overline{W}_{z_0}=\sum_{k=0}^{s}C_k^{(3)}(x,y)t^k,$$

де $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}, C_k^{(3)}$ - відомі коефіцієнти.

Будемо шукати розв'язок рівняння (3) у вигляді степеневих рядів:

$$V_x=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(1)}(x,y)t^k,$$

$$V_y=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(2)}(x,y)t^k,$$

$$V_z=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(3)}(x,y)t^k,$$

$$p=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(4)}(x,y)t^k,$$

де $A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, A_k^{(3)}, A_k^{(4)}$ - невідомі коефіцієнти.

Підставивши ці вирази в рівняння (3) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *t*, отримаємо

$$A_{k+1}^{(1)}+\sum_{j=0}^{\min(k,s)}(A_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}C_{k-j}^{(1)}+A_j^{(2)}\frac{\partial}{\partial y}C_{k-j}^{(1)}+A_j^{(3)}\frac{\partial}{\partial z}C_{k-j}^{(1)}+C_j^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}A_{k-j}^{(1)}+$$
$$+C_j^{(2)}\frac{\partial}{\partial y}A_{k-j}^{(1)}+C_j^{(3)}\frac{\partial}{\partial z}A_{k-j}^{(1)})=\nu\Delta A_k^{(1)}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}A_k^{(4)}, k=0,1,2,... \tag{4}$$

Аналогічно записуються інші рівняння. З цих рівнянь видно, що якщо ми знаємо

$$p=M(p^*)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(4)}t^k,$$

то можемо рекурентно знайти будь-яке скінченне число коефіцієнтів $A_k^{(i)}, i=1,2,3; k=0,1,2,...,$ тобто достатньо знайти середні в'язкі компоненти швидкості V_x, V_y, V_z.

У загальному випадку при невідомому тиску *P*, тобто при невідомих коефіцієнтах $A_k^{(4)}$, продиференціюємо всі три рівняння виду (4) відповідно по змінних x, y, z і потім, складаючи їх з урахуванням рівняння нерозривності, записаного у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x}A_k^{(1)}+\frac{\partial}{\partial y}A_k^{(2)}+\frac{\partial}{\partial z}A_k^{(3)}=0, k=0,1,2,...,$$

отримаємо коефіцієнти $A_k^{(4)}$, які є розв'язками рівняння виду

$$\Delta A_k^{(4)} = g_k$$

з відомою правою частиною і заданими початковими граничними умовами. Таким чином, можна знайти $A_k^{(4)}$, а значить і середні швидкості V_x, V_y, V_z з достатньою точністю.

Висновки. Таким чином, усередненивши рівняння Нав'є-Стокса, можна отримати шукані характеристики турбулентного потоку рідини та побудувати замкнену модель турбулентності в рамках моделі ідеальної рідини.

Список використаної літератури:

1. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР, 1941, т.30, №4, с.299-303.
2. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит, 1995.-368с.
3. Косторной С.Д., Давиденко А.К., Косторной А.С. Методологические аспекты построения моделей турбулентности при численном решении уравнений Рейнольдса //Труды 10-й международной научно-технической конференции «Герметичность, вибронадёжность и экологическая безопасность насосного и компрессорного оборудования». Сумы, изд-во СумДУ, 2002, т.2, с.229-240.

Борозенец Н.С., Пугач В.И. Анализ алгоритма построения замкнутых моделей турбулентности при отрывном обтекании тел

Предложен алгоритм решения частично сглаженных локально-индивидуальным способом на основе метода наименьших квадратов уравнений Навье – Стокса. Развиваемый подход решения уравнений Рейнольдса позволит построить замкнутую модель турбулентности в рамках модели идеальной жидкости.

***Ключевые слова**: турбулентный поток, осредненные уравнения, уравнения Навье-Стокса, уравнения Рейнольдса, скорость, давление.*

Borozenets N., Pugach V. Analysis of the algorithm for the construction of closed models of turbulence in separated flow around bodies

The vast majority of flows that actually occur in nature and technology are turbulent. Laminar flows are a fairly rare phenomenon. Therefore, it is clear that these properties of turbulent flows can be needed in the solution of many problems of science and technology. So, the question about how often turbulent flows is of great practical and theoretical interest.

It is believed that the non-stationary Navier-Stokes equations completely describe turbulent flows. However, you cannot calculate turbulent flows as accurately as the laminar.

The algorithm of the decision in part smoothed local - individual is offered by a way on the basis of a method of the least squares of equations of Navye-Stoks. The developed approach of decisions of Reynolds will allow to construct the closed model of turbulence within the framework of model of an ideal liquid.

***Keywords:** turbulent flow, seredne equations, Navier-Stokes equations, Reynolds equation, velocity, pressure.*

Дата надходження до редакції: 25.11.2015
Резензент: д.т.н., проф. Павлюченко А.М.

УДК 378.09

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОБЛЕМНОГО ПІДХОДУ ДО ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В АГРАРНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

Н. С. Борозенець
В. І. Пугач
Сумський національний аграрний університет

В статті обговорюється доцільність застосування проблемного підходу до вивчення вищої математики. Досліджуються різні типи проблемних ситуацій і приводяться приклади таких ситуацій в курсі вищої математики.

***Ключові слова:**проблемне навчання, проблемна ситуація, проблемні завдання, самостійна діяльність.*

Аналіз актуальних досліджень. Багато математиків-методистів у різні часи сходилися на тому, що не можна давати знання в готовому вигляді. Методи проблемного навчання використовувалися ще в Стародавній Греції - батьківщині західних освітніх традицій.

Останнім часом у педагогічній науці інтерес до проблемного навчання виник у 20-30-ті роки минулого століття і відродився на новому етапі в 60-70-ті роки. Проблемному навчанню присвяче-