

## ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЙ І ПРИСКОРЕНЬ ОКРЕМИХ ТОЧОК ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ З ДОПОМОГОЮ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ

С. Ф. Пилипака, д.т.н.  
А. В. Чепіжний, аспірант  
НУБіП України

Для визначення траєкторій руху окремих точок, які належать ланкам плоского механізму, можна застосовувати супровідний тригранник Френе траєкторії руху кінця цієї ланки. Це дає також можливість визначати вектори прискорень цих точок під час руху. В роботі розглядається ведена ланка механізму, яка шарнірно зв'язана із ведучою – кривошипом. Спільною траєкторією руху кінців цих двох ланок є коло, по якому із постійною швидкістю рухається шарнір. Тригранник Френе розташовуємо таким чином, що його вершина збігається із шарніром, орт головної нормалі спрямований вздовж кривошипа до центра кола, а орт дотичної дотикається до кола. При обертанні кривошипа тригранник рухається вздовж кола і його головна нормаль збігається із кривошипом.

В системі супровідного тригранника кінець веденої ланки збігається із вершиною тригранника, а сама ланка складає певний кут із ортом дотичної. При роботі механізму цей кут змінюється за певним законом, тобто ведена ланка в системі тригранника обертається навколо вершини із певною кутовою швидкістю. Якщо відомий закон повороту веденої ланки в системі тригранника у функції довжини дуги кола – траєкторії шарніру, то можна за відомими формулами визначити траєкторію, швидкість та прискорення будь-якої точки веденої ланки.

В роботі на прикладі деяких механізмів показано побудову траєкторій окремих точок веденої ланки та знаходження їх прискорень. При цьому величина прискорення в залежності від повороту кривошипа може бути показана на графіку, а також безпосередньо на траєкторії у відповідній її точці вектором в масштабі. Це дає можливість візуально оцінити зміну прискорення за величиною і напрямом вздовж траєкторії руху точки.

**Ключові слова:** кривошип, ведена ланка, тригранник Френе, траєкторія, прискорення.

**Постановка проблеми.** При русі ланок плоского механізму виникають прискорення, які потрібно враховувати при силовому аналізі. Сукупність елементарних сил інерції ланки може бути замінена силою інерції, прикладеною в центрі мас цієї ланки. З допомогою тригранника Френе зручно визначати прискорення ланки плоского механізму, один кінець якої рухається по колу. Для цього потрібно знати закон переміщення ланки в системі тригранника Френе, який є супровідним для кола - траєкторії руху кінця ланки.

Якщо закон руху ланки по відношенню до рухомого тригранника Френе встановлено, то можна також знаходити траєкторії руху окремих точок ланки, включаючи центр мас. Це дає можливість ставити у відповідність кожній точці траєкторії вектор прискорення. Складові прискорення знаходяться в проекціях на орти супровідного тригранника, але при необхідності їх можна перерахувати на осі нерухомої системи координат.

**Аналіз останніх досліджень.** Велике значення має дослідження траєкторних кривих руху окремих складових механізмів або точок їх ланок. До задач цієї групи відноситься створення механізмів, які змогли б відтворювати наперед задані криві. Це задачі синтезу механізмів. Вони були розв'язані академіком П.Л. Чебишевим по методу найкращого наближення функцій при умові, що шатунна крива є симетричною кривою [1]. Деякі праці із прикладної геометрії присвячені

саме цій тематиці [2-4]. Відшуканню множини траєкторних кривих, утворених за допомогою планетарних механізмів, присвячена монографія [5]. Кінематику руху відрізка у площині за заданими умовами розглянуто в праці [6]. Застосування тригранника Френе для визначення положень ланок плоского механізму показано у праці [7].

**Мета досліджень.** Метою статті є відшукання траєкторій руху окремих точок рухомих ланок плоских механізмів з допомогою тригранника і формул Френе та визначення величини прискорення в цих точках.

**Результати досліджень.** Матеріал статті ґрунтується на теорії складного руху точки, коли рухомою системою координат виступає рухомий тригранник Френе напрямної кривої. Такою кривою в нашому випадку розглядається коло радіуса  $a$ , тобто крива із сталою кривиною  $k=1/a - const$ . Обумовлено це тим, що в багатьох плоских механізмах ведучою ланкою є кривошип довжиною  $a$ , який обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо своєї осі. Ведена ланка одним своїм кінцем теж описує це ж саме коло, тобто це коло є спільною траєкторією руху кінців двох ланок: ведучої і веденої. Якщо закон руху ведучої ланки завжди відомий – один кінець нерухомий, а другий рухається по колу із сталою швидкістю  $V=aw$ , то рух веденої ланки має свій закон руху для кожного механізму. Один її кінець теж рухається по спільному колу із сталою швидкістю  $V=aw$ , а закон руху другого кінця

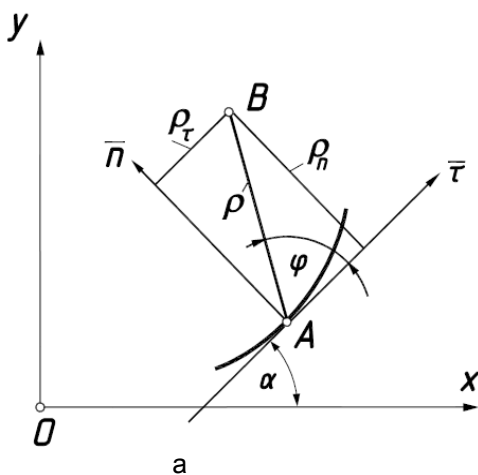
залежить від призначення механізму. В загальному випадку положення веденої ланки  $AB$  в системі рухомого тригранника з ортами  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  і вершиною  $A$  на напрямній кривій показано на рис. 1,а. Тригранник рухається по напрямній кривій і одночасно в його системі рухається точка  $B$ , положення якої в системі тригранника визначається двома координатами: відстанню  $\rho$  і кутом  $\varphi$ , або ж проекціями  $\rho_\tau$  і  $\rho_n$ . Якщо відомі залежності  $\rho=\rho(s)$  і  $\varphi=\varphi(s)$  або ж  $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$  і  $\rho_n=\rho_n(s)$ , де  $s$  – довжина дуги напрямної кривої, вздовж якої рухається тригранник, то це дає можливість знайти траєкторію руху точки  $B$ , її швидкість і прискорення в проекціях на орти тригранника. Траєкторія руху знаходиться в проекціях на нерухому систему координат із врахуванням кута  $\alpha$  повороту системи тригранника Френе по відношенню до нерухомої системи (рис. 1,а), який визначається за відомою формулою

$$\alpha = \int k ds = ks \quad [8];$$

$$\begin{aligned} x_B &= \rho_\tau \cos(ks) - \rho_n \sin(ks) + \frac{1}{k} \sin(ks); \\ y_B &= \rho_\tau \sin(ks) + \rho_n \cos(ks) - \frac{1}{k} \cos(ks). \end{aligned} \quad (1)$$

Величина швидкості залежить від перших похідних зазначених вище функцій, а прискорення – від перших і других, а також від першої похідної натурального рівняння  $k=k(s)$  [8, 9].

У випадку механізму ми вважатимемо, що



ланка  $AB$  прямолінійна і точка  $B$  на ній нерухома, тобто положення точки  $B$  в системі тригранника Френе визначатиметься відстанню  $\rho=const$  і змінним кутом  $\varphi=\varphi(s)$ . Вирази проєкцій прискорення точки  $B$  при  $\rho=AB=const$  і  $k=1/a=const$  на орти супровідного тригранника Френе теж мають спрощений вигляд [9]:

$$\begin{aligned} \bar{w} = \frac{dV}{ds} &= \bar{\tau} \left[ V_A^2 (\rho_\tau'' - k^2 \rho_\tau - 2k \rho_\tau') \right] + \\ &+ \bar{n} \left[ V_A^2 (\rho_n'' - k^2 \rho_n + 2k \rho_n' + k) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким чином, вирази проєкцій прискорення  $w$  точки  $B$  на орти тригранника Френе запишуться:

$$\begin{aligned} w_\tau &= V_A^2 (\rho_\tau'' - k^2 \rho_\tau - 2k \rho_\tau'); \\ w_n &= V_A^2 (\rho_n'' - k^2 \rho_n + 2k \rho_n' + k). \end{aligned} \quad (3)$$

Визначення закону руху ведучої ланки  $OA$  (рис. 1,б) не викликає труднощів. Вона повертається навколо точки  $O$  на кут  $\psi$  із постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Можна показати, що цей кут рівний кутові  $\alpha=s/a$ , на який повертаються орти  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  при русі тригранника по напрямному колу. А от рух ланки  $AB$  (на рис. 1,б позначено через  $\rho$ ) має більш складний характер, поворот якої навколо точки  $A$  на кут  $\varphi$  в системі рухомого тригранника Френе має свій індивідуальний закон в залежності від призначення механізму.

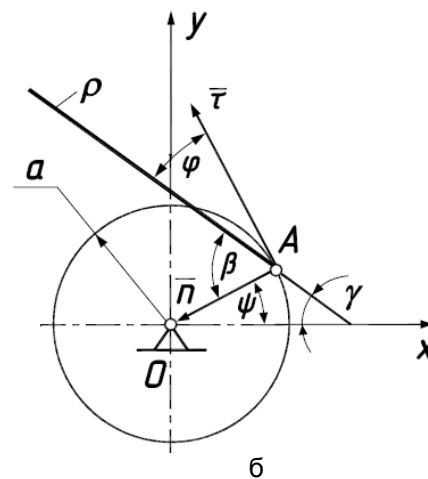


Рис. 1. Графічні ілюстрації до схеми роботи двохланкового плоского механізму:  
а) схема руху ланки  $AB$  в системі супровідного тригранника напрямної кривої;  
б) ланка  $\rho$  в системі супровідного тригранника напрямного кола радіуса  $a$  ( $k=1/a$ )

Розглянемо відомий лямбдаподібний механізм Чебишева, який дістав свою назву за подібність в середньому положенні до грецької літери  $\lambda$  (рис. 2,а). Він визначається трьома незалежними параметрами – відстанями  $a$ ,  $b$  і  $d$ . Він відноситься до напрямних механізмів (так званих прямил) і призначений для забезпечення ділянки траєкторії точки  $B$ , максимально

наближеної до прямої лінії [1]. При цьому  $AC=CB=b$  (рис. 2,а) і між величинами  $a$ ,  $b$  і  $d$  мають витримуватися певні залежності в заданих межах [1].

Наша задача – підібрати серед зазначених меж такі значення параметрів  $a$ ,  $b$  і  $d$ , щоб ділянка траєкторії точки  $B$  була максимально наближена до відрізка прямої. Для цього нам

потрібно встановити закон повороту ланки  $AB$  (на рис. 1,б вона позначена через  $\rho$ ) в системі тригранника Френе. При роботі механізму змінюються кути  $\psi$ ,  $\varepsilon$  (рис. 2,а) і  $\varphi$ ,  $\gamma$  (рис. 1,б). Всі вони зв'язані між собою. Нам потрібно знайти залежність  $\varphi=\varphi(s)$ , оскільки вказаний кут є кутом між ланкою  $AB$  і ортом головної нормалі тригранника, який збігається із кривошипом  $OA$

механізму. Якщо така залежність буде знайдена, то ми зможемо записати проекції будь-якої точки ланки  $AB$  на орти рухомого тригранника:

$$\rho_\tau = \rho \cos \varphi; \rho_n = \rho \sin \varphi, \quad (4)$$

де  $\rho$  - відстань від точки  $A$  ланки  $AB$ .

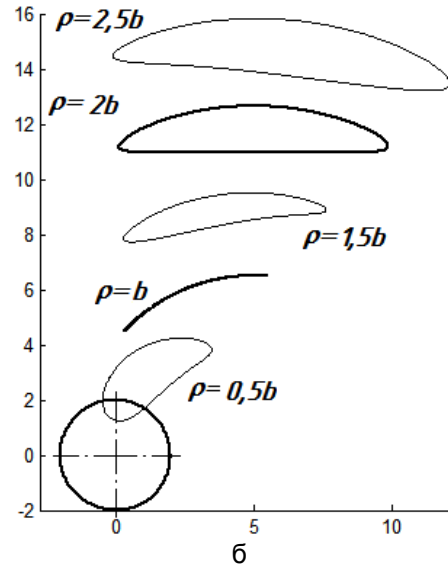
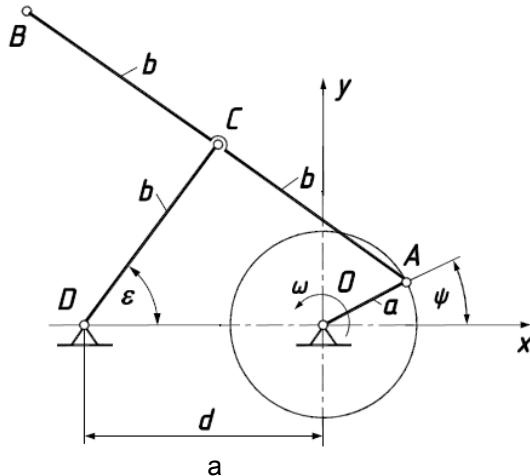


Рис. 2. Графічні ілюстрації до схеми роботи лямбдаподібного механізму Чебишева:

а) схема механізму із зазначенням трьох параметрів  $a$ ,  $b$  і  $d$ ;

б) траєкторії окремих точок ланки  $AB$  при роботі механізму

Спочатку знайдемо взаємозв'язок між кутами  $\psi$  і  $\varepsilon$  (рис. 2,а). Будемо виходити із того, що ланки  $AB$  і  $BC$  мають спільну точку  $C$  (рис. 2,а). Запишемо проекції ланок  $OA$ ,  $AC$  і  $BC$  на осі  $Ox$  і  $Oy$ . Проекції кінця  $A$  ланки  $OA$  запишуться через її довжину  $a$  (рис. 1,б):

$$x_A = a \cos \psi; \quad y_A = a \sin \psi. \quad (5)$$

Проекції кінця  $C$  ланки  $AC$  запишуться, виходячи із умови, що вона проходить через точку  $A$ , координати якої знайдені в (5):

$$x_C = a \cos \psi - b \cos \gamma; \quad y_C = a \sin \psi + b \sin \gamma. \quad (6)$$

З іншої сторони, запишемо проекції кінця  $C$  ланки  $DC$ , виходячи із умови, що вона проходить через точку  $D$  з координатами  $\{-d, 0\}$ :

$$x_C = -d + b \cos \varepsilon; \quad y_C = b \sin \varepsilon. \quad (7)$$

Прирівнявши попарно між собою координати точки  $C$  в (6) і (7), одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими кутами  $\varepsilon$  і  $\gamma$  (кут  $\psi$  відомий, оскільки кривошип обертається із сталою кутовою швидкістю і кут  $\psi$  змінюється за лінійним законом:  $\psi=s/a$ ):

$$\begin{aligned} a \cos \psi - b \cos \gamma &= -d + b \cos \varepsilon; \\ b \sin \varepsilon &= a \sin \psi + b \sin \gamma. \end{aligned} \quad (8)$$

Розв'язуємо систему (8) відносно кутів  $\varepsilon$  і  $\gamma$  за допомогою програмного продукту символічної математики «Mathematica». Із-за громіздкості виразів наводимо розв'язок тільки для кута  $\gamma$ , який нам потрібен в подальшому:

$$\gamma = \arccos \left[ \frac{d^3 + a(a^2 + 3d^2) \cos \psi}{2bA} + \frac{a^2 d(2 + \cos 2\psi) + a \sin \psi \sqrt{A(4b^2 - A)}}{2bA} \right], \quad (9)$$

де  $\psi = ks$ ,  $A = a^2 + d^2 + 2ad \cos ks$ .

Тепер знайдемо вираз для кута  $\varphi$ . Можна показати, що кути  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\gamma$  (рис. 1,б) зв'язані між собою залежністю:

$$\beta = \gamma + \psi = \gamma + ks. \quad (10)$$

Оскільки кути  $\beta$  і  $\varphi$  в сумі становлять  $90^\circ$ , то можна записати:

$$\varphi = 90^\circ - (\gamma + ks). \quad (11)$$

Таким чином, закономірність зміни кута  $\varphi=\varphi(s)$  знайдена: вона визначається виразом (11) із врахуванням (9). Тепер за формулами (4) можна знайти координати будь-якої точки ланки  $AB$  в проекціях на орти тригранника під час його руху по напрямному колу радіуса  $a$ . Рівняння (4) є рівняннями відносного руху точки ланки  $AB$  на відстані  $\rho$  від точки  $A$ , тобто це є слід руху точки в стичній площині тригранника Френе. Щоб знайти абсолютну траєкторію в нерухомій системі координат, потрібно скористатися рівняннями (1). На рис. 2,б побудовано траєкторії точок на різних відстанях від точки  $A$ . Траєкторію точки  $B$  ми отримали при  $\rho=2b$ . Це є симетрична крива із прямолінійною ділянкою, подібною до наведеної

в [1] на стор. 171, рис. 80. Її вдалося побудувати шляхом підбору параметрів  $a=2$ ,  $b=6,5$  і  $d=5$  із рекомендованих співвідношень і їх меж. При  $\rho=b$  отримуємо дугу кола радіуса  $b$ , що зрозуміло із принципу роботи механізму. Це свідчить про достовірність отриманих результатів. На рис. 2,б показані траєкторії інших точок ланки  $AB$ , в тому числі і коло радіуса  $a$  при  $\rho=0$ .

Для ланки  $AB$  симетричну траєкторію описує тільки точка  $B$  при  $\rho=2b$  (не приймаючи до уваги напрямного кола). Можна прослідкувати трансформацію цієї траєкторії зміною одного із параметрів. На рис. 3,а показані шатунні криві (траєкторії точки  $B$ ) при  $a=2$ ,  $d=5$  і зміні параметра  $b$  від 4 до 8 через 0,5 лінійних одиниць. На рис. 3,б показано траєкторії точок ланки  $AB$  при максимальному значенні

параметра  $d=11$ , при якому механізм може працювати. Траєкторія точки  $B$  перетворюється в краплеподібну симетричну криву. На рис. 3,б зображено ланку  $AB$  в крайніх положеннях з нанесеними точками, для яких в одному положенні вибрано індекс «1», а в іншому – «2».

Прискорення точки на ланці  $AB$  будемо визначати за формулами (3). Для цього знайдемо похідні виразів (4), маючи на увазі, що  $\rho=const$ , а  $\varphi=\varphi(s)$ :

$$\begin{aligned} \rho'_\tau &= -\rho\varphi' \sin \varphi; \\ \rho'_n &= \rho\varphi' \cos \varphi; \\ \rho''_\tau &= -\rho(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi); \\ \rho''_n &= \rho(-\varphi'' \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi). \end{aligned} \quad (12)$$

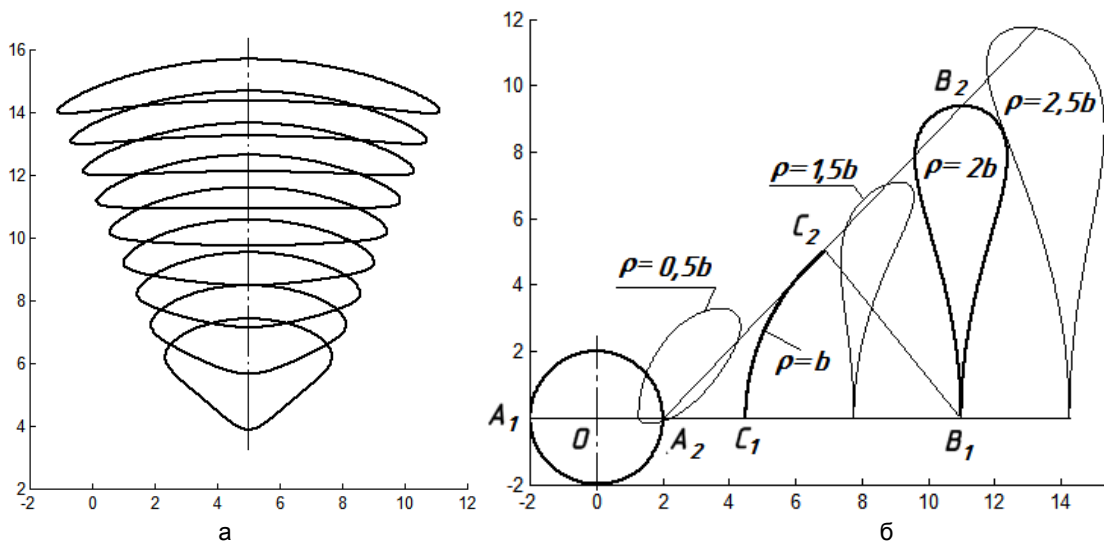


Рис. 3. Траєкторії точок ланки  $AB$ :

- а) трансформація траєкторії точки  $B$  при зміні параметра  $b$  від 4 до 8 через 0,5 лінійних одиниць;  
б) траєкторії окремих точок ланки  $AB$  при  $a=2$ ,  $b=6,5$  і  $d=11$

Підставляємо вирази (4) і (12) у (3) і після спрощень отримуємо:

$$\begin{aligned} w_\tau &= -\rho V_A^2 [\varphi'' \sin \varphi + (k + \varphi')^2 \cos \varphi]; \\ w_n &= k V_A^2 + \rho V_A^2 [\varphi'' \cos \varphi - (k + \varphi')^2 \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (13)$$

Формули (13) можна отримати із наведених загальних формул в праці [9] при  $V_A=const$  і  $\rho=const$ . Підставимо в (13) вираз кута  $\varphi=\varphi(s)$  із (11) та його похідні  $\varphi' = -(\gamma' + k)$ ,  $\varphi'' = -\gamma''$  і після спрощень отримуємо:

$$\begin{aligned} w_\tau &= \rho V_A^2 [\gamma'' \cos(\gamma + ks) - \gamma'^2 \sin(\gamma + ks)]; \\ w_n &= k V_A^2 - \rho V_A^2 [\gamma'' \sin(\gamma + ks) + \gamma'^2 \cos(\gamma + ks)]. \end{aligned} \quad (14)$$

У виразах (14)  $k=1/a$ , швидкість руху тригранника по колу  $V_A=\omega a=\omega/k$ , де  $\omega$  – кутова швидкість обертання кривошипа  $OA$ , відстань  $\rho$  задаємо в залежності від того, для якої точки ланки  $AB$  хочемо знайти прискорення. Найважче

в цих виразах знайти похідні кута  $\gamma = \gamma(s)$ , оскільки він має громіздкий вигляд (вираз (9)). Вручну зробити це було б нереально, однак з допомогою продукту «Mathematica» стає можливим.

За допомогою виразів (14) можна знайти величину і напрям прискорення будь-якої точки траєкторії ланки  $AB$  в залежності від значення змінної  $s$ , тобто від положення кривошипа. Щоправда, напрям вектора прискорення ми отримуємо на орти рухомого тригранника, однак знаючи його кут повороту  $\alpha=ks$  по відношенню до нерухомої системи, можна знайти напрям в нерухомій системі координат. Величину прискорення знаходимо із векторної суми складових (14):

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \quad (15)$$

Із (14) випливає, що при  $\rho=0$  присутня тільки одна складова прискорення  $w_n = k V_A^2$ , яка

спрямована вздовж орта головної нормалі тригранника. Це прискорення відповідає точці А ланки АВ, яка рухається по колу радіуса  $a$  із сталою швидкістю  $V_A$ . Ця складова носить назву доцентрового прискорення, яке є для нашого випадку сталим, і спрямоване до центру кола. Для визначення прискорення для інших точок ланки АВ при  $\rho \neq 0$  за формулами (14) потрібно мати вирази першої і другої похідних кута  $\psi$  (9). Зважаючи на громіздкість виразу (9), що

приведе ще до більш громіздких виразів похідних, розглянемо знаходження вектора прискорення на прикладі кривошипно-повзунного механізму (рис. 4), у якого вираз кута  $\varphi = \varphi(s)$  має простий вигляд [10]:

$$\varphi = 90^\circ - ks + \arcsin \frac{\sin ks}{Lk}, \quad (16)$$

де  $L$  – довжина шатуна АВ.

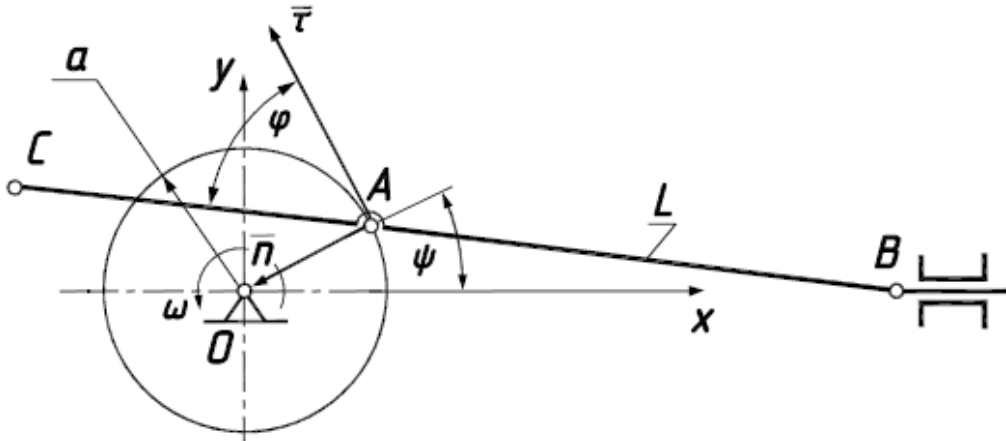


Рис. 4. Схема кривошипно-повзунного механізму

За формулами (13) знаходимо складові прискорення точки ланки АВ (шатуна) на відстані  $\rho$  від точки А в напрямі точки В. За формулою (15) знаходимо закономірність зміни величини прискорення в залежності від довжини дуги  $s$  напрямного кола, що рівноцінно куту  $\psi = s/a = ks$  повороту кривошипа ОА. Такі графіки зміни прискорення для різних точок шатуна побудовані на рис. 5,б.

Для більшої наочності ми побудували в масштабі вектори прискорень окремих точок шатуна вздовж траєкторії їх руху (рис. 5,а). Було прийнято наступні параметри механізму:  $OA = a = 2$  ( $k = 0,5$ ) і  $AB = L = 6$ . Кутова швидкість обертання

кривошипа  $\omega = 5 \text{ c}^{-1}$ . Порядок побудови наступний. Траєкторію руху окремих точок шатуна визначали за рівняннями (1), для яких складові проєкції на орти тригранника знаходили за виразами (4), знаючи закономірність зміни кута  $\varphi = \varphi(s)$  із (16). Щоб побудувати вздовж траєкторій руху вектори прискорень, необхідно перейти від їх проєкцій (13) на орти тригранника Френе до проєкцій на нерухому систему за формулами повороту на кут  $\alpha = ks$ :

$$\begin{aligned} w_x &= w_\tau \cos(ks) - w_n \sin(ks); \\ w_y &= w_\tau \sin(ks) + w_n \cos(ks). \end{aligned} \quad (18)$$

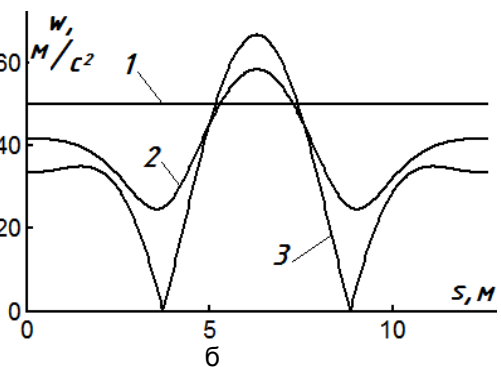
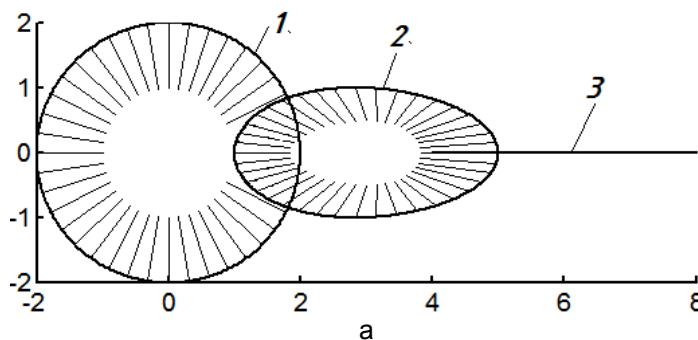


Рис. 5. До визначення прискорення точок шатуна АВ (1 – для точки А, 2 – для середньої точки між А і В, 3 – для точки В): а) розподіл векторів прискорення вздовж траєкторій руху точок; б) графіки зміни прискорення  $w = w(s)$

В залежності від положення шатуна (змінної  $s$ ) визначаються координати певної точки траєкторії шатуна (наприклад, точки В при  $\rho = L$ )

за формулами (1). До координат цієї точки потрібно додати знайдений вектор (18), попередньо помноживши його на певний

масштабний коефіцієнт  $m$  для того, щоб уникнути його надмірної довжини. Ми отримаємо координати кінця вектора:

$$x_w = x_B + m w_x; \quad y_w = y_B + m w_y. \quad (19)$$

З'єднавши точку з координатами  $x_B$  і  $y_B$  на траєкторії з координатами кінця вектора  $x_w$  і  $y_w$  відрізком, ми отримаємо вектор прискорення в даній точці траєкторії. Збільшуючи змінну  $s$  на певну величину  $\Delta s$  ми можемо побудувати вектори вздовж траєкторії з необхідною щільністю. На рис. 5,а цифрою 1 позначено траєкторію точки  $A$  і побудовано вектори за описаним алгоритмом. Всі вони мають сталу величину –  $50 \text{ м/с}^2$  (див. рис. 5,б) і спрямовані до центру кола, оскільки точка  $A$  обертається із сталою кутовою швидкістю. Для середньої точки шатуна  $AB$  (позначено цифрою 2) вектори мають змінну довжину (величину). Їх напрям не збігається із нормаллю до траєкторії, оскільки точка рухається по ній із змінною швидкістю і тому окрім доцентрового присутнє ще і тангенціальне прискорення. Для точки  $B$  шатуна (позначено цифрою 3) зміню величини і напрямку вектора на рис. 5,а побачити не можна, оскільки

всі вектори збігаються із прямою лінією – траєкторією ковзання повзуна. Зміну величини прискорення можна побачити на графіку (рис. 5,б). З нього видно, що в двох точках прискорення рівне нулю. В цей момент вектор прискорення міняє знак на протилежний (на графіку це не відображено, тому що вираз (15) всі величини дає додатними). Проте цю зміну можна побачити на траєкторії точки, близької до точки  $B$ , наприклад, при  $\rho=0,9L=5,4 \text{ м}$ . В цьому випадку траєкторія буде сплюснутою кривою, близькою до прямої, вздовж якої можна прослідкувати зміну напрямку і величини вектора прискорення.

Аналізуючи вирази (17) неважко побачити, що при  $Lk=1$  перший вираз перетворюється у сталу величину, а другий – в нуль. Конструктивно це означає, що довжина кривошипа  $OA$  і шатуна  $AB$  однакова. У цьому випадку кутова швидкість повороту шатуна навколо точки  $A$  по відношенню до рухомої системи координат є сталою і кутове прискорення рівне нулеві. З'ясуємо особливості роботи такого механізму. На рис. 6,а побудовано траєкторії точок  $A$  (коло) і  $B$  (пряма лінія) та множини положень шатуна.

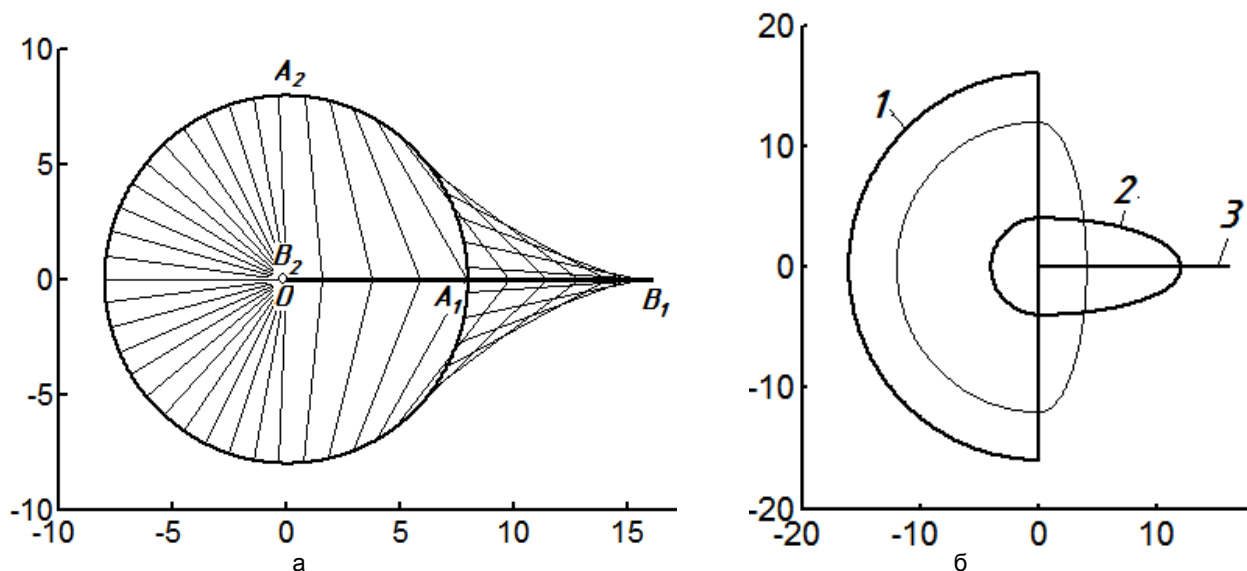


Рис. 6. Частковий випадок кривошипно-повзунного механізму при  $OA=AB=8 \text{ м}$ : а) множина положень шатуна  $AB$ ; б) траєкторії окремих точок шатуна

На рис. 6,а позначено два характерних положення шатуна. При крайньому положенні (положення  $A_1B_1$ ) шатун і кривошип розташовані на спільній прямій – лінії ковзання повзуна. При подальшій роботі точка  $A$  рухається по колу до положення  $A_2$ , а точка  $B$  – по прямій до положення  $B_2$ . Коли точки займуть ці положення, то кривошип збіжиться із шатуном і подальший їх рух буде спільним: вони обертатимуться навколо точки  $O \equiv B$  до нижнього положення точки  $A$  на колу і весь цей час повзун (точка  $B$ ) буде стояти на місці. Далі кривошип і шатун розділяються, повзун буде рухатися по прямій в напрямі свого протилежного крайнього положення  $B_1$  і цикл роботи механізму буде симетричний

попередньому.

Таким чином такий механізм має корисну властивість – в процесі роботи зупиняти одну із своїх ланок (повзун) на певний час (половину тривалості циклу). Проте це не єдина корисна властивість. На рис. 6,б побудовані траєкторії окремих точок шатуна: 3 – повзуна (точки  $B$ ), 2 – середини шатуна  $AB$ , 1 – точки  $C$ , яка розташована на шатуні з протилежної сторони від точки  $B$  і симетрично відносно точки  $A$ , тобто на відстані  $AB=BC$ . Як видно із рисунка, одна частина цієї траєкторії є півколо, а друга – пряма лінія – діаметр цього кола. Отже, цей механізм може використовуватися як прямилло. Не позначена на рис. 6,б траєкторія належить точці

шатуна між точками С і А. Траєкторія точки А (коло) не показана.

На рис. 7 зображені деякі із шатунних кривих, представлених на рис. 6,б, з нанесеними векторами прискорень вздовж них. Для всіх цих траєкторій є характерним те, що їх частиною є півколо, по якому рухається точка шатуна впродовж пів циклу. Рівномірність розподілу векторів і їх величина на цих ділянках є сталою, що свідчить про те, що точка рухається по кривій

із сталою швидкістю. На другій частині траєкторії цього не відбувається: і щільність розподілу, і величина векторів є змінними. На рис. 7,г наведені графіки зміни величини прискорень для деяких траєкторій. Для всіх їх характерним є те, що частина графіка є пряма, тобто прискорення стали, що відповідає руху точки шатуна по колу. Для точки В повзуна (графік позначено цифрою 3) впродовж пів циклу прискорення рівне нулеві. Це відповідає його зупинці.

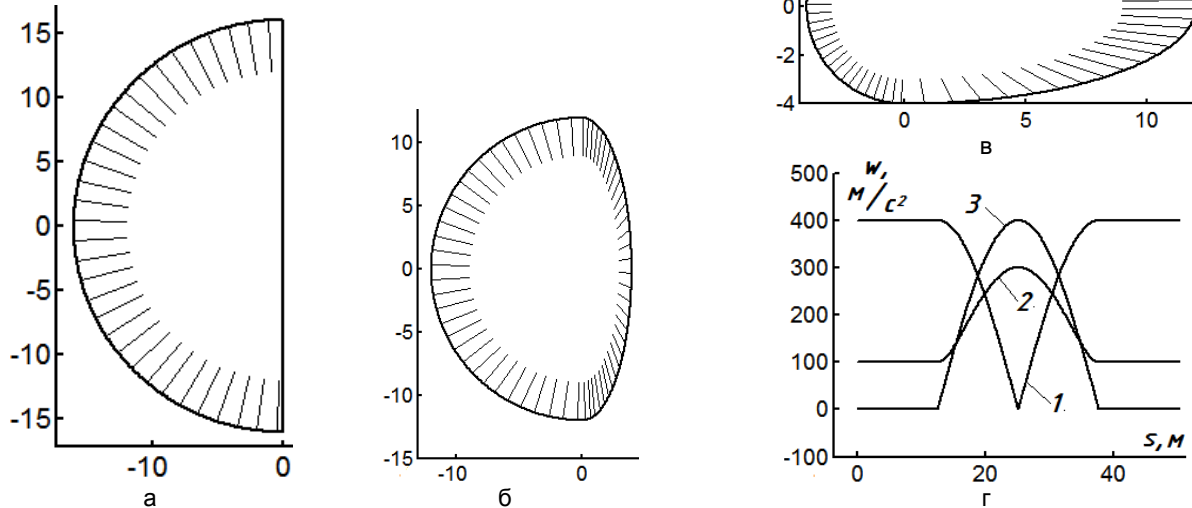


Рис. 7. До визначення прискорення точок шатуна АВ кривошипно-повзунного механізму при  $OA=AB=8$  м: а), б), в) – розподіл векторів прискорень вздовж траєкторій точок шатуна АВ, які зображені на рис. 6,б; г) графіки зміни величини прискорення вздовж траєкторій, позначених відповідними цифрами на рис. 6,б

**Висновки.** Для аналітичного опису множини положень веденої прямолінійної ланки плоского механізму та визначення прискорень окремих її точок доцільно застосовувати тригранник Френе, вершина якого збігається із шарніром з'єднання ланки із кривошипом. Тригранник в такому випадку є супровідним для кола – траєкторії руху шарніра. Ланка при переміщенні здійснює обертальний рух по відношенню до рухомого тригранника навколо його вершини. Знаходження аналітичного закону обертання ланки у функції довжини дуги напрямного кола дає можливість визначення інших кінематичних характеристик, в тому числі траєкторій руху окремих точок ланки та векторів прискорень.

### Список використаної літератури:

1. Левитская О.Н. Курс теории механизмов и машин / О.Н. Левитская, Н.И. Левитский. – М.: Высш. шк., 1985. – 279 с.
2. Бергер Э.Г. Способ геометрического и механического образования рациональных кривых 3-го и 4-го порядка / Э.Г. Бергер, В.П. Табацков // Прикл. геометрия и инж. графика. –К.: Будівельник, 1982. –Вып. 33. – С. 88 - 89.
3. Потишко А.В. Воспроизведение некоторых спиралей / А.В. Потишко, В.С. Кобезская // Прикл. геометрия и инж. графика. –К.: Будівельник, 1971. –Вып. 13. – С. 84 - 85.
4. Зубашенко Г.П. Геометричні методи кінематичного аналізу плоских важільних механізмів вищих класів / Г.П. Зубашенко, О.Г. Корченко, Т.В. Попкова, М.Г. Макаренко, В.П. Щербина // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2007. –Вип. 77. –С. 80 – 84.
5. Росоха С.В. Геометричне моделювання об'ємів робочих камер роторно-планетарних трохойдних машин / С.В. Росоха, Л.М. Куценко. – Х.: УЦЗУ, 2007. – 176 с.
6. Пилипака С.Ф. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка, Т.С. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2007. –Вип. 77. –С. 36 - 42.
7. Чепіжний А.В. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / А.В. Чепіжний, В.М. Бабка // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2012. –Вип. 90. – С. 20 – 26.
8. Пилипака С.Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютні швидкість і траєкторія / С.Ф. Пилипака // Електротехніка і механіка. –К., 2006. - №1. – С. 84 – 94.
9. Пилипака С.Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина друга. Абсолютне прискорення. Задачі на динаміку точки / С.Ф. Пилипака // Електротехніка і механіка. –К., 2006. - № 2. – С. 88 – 100.
10. Чепіжний А.В. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / В.М. Бабка, А.В. Чепіжний // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2012. –Вип. 90. – С. 20 – 26.

### References

1. Levitskaya, O.N., Levitskiy, N.I. (1985). Kurs teorii mekhanizmov i mashin [The course of the theory of mechanisms and machines]. M.: Vyssh. shk., 279.
2. Berger, E.G., Tabatskov, V.P. (1982). Sposob geometricheskogo i mekhanicheskogo obrazovaniya ratsionalnykh krivykh 3-g i 4-go poryadka [The method of geometrical and mechanical formation of rational curves of 3-d and 4-th order]. Prikl. geometriya i inzh. Grafika K.: Budivelnik, 33, 88 - 89.
3. Potishko, A.V., Kobezskaya V.S. (1971). Vosproizvedenie nekotorykh spiraley [Playback of some spirals]. Prikl. geometriya i inzh. grafika. K.: Budivelnik, 13, 84 - 85.
4. Zubashhenko, G.P., Korchenko, O.G., Popkova, T.V., Makarenko, M.G., Shherby'na, V.P. (2007). Geometri'chni metody` kinematy`chnogo analizu plosky`x vazhil'ny`x mexanizmv vy`shhy`x klasiv [Geometric methods kinematically analysis flat lever mechanisms of the upper classes]. Pry`kl. geometriya ta inzh. grafika. K.: KNUBA, 77, 80 – 84.
5. Rosoha, S.V., Kucenko, L.M. (2007). Geometri`chne modelyuvannya ob'yemiv robochy`x kamer rotorno-planetary`x troxoyidny`x mashy`n [Heometrychnist volumes simulation chambers planetary rotary machines troxoyidnih]. X.: UCZU, 176.
6. Pilipaka, S.F., Babka, V.M., Pilipaka, T.S. (2007). Kinematy`ka vidrizka, kinci yakogo opy` suyut` zadani liniyi u ploshhy`ni [Kinematics segment, the end of which describe a given line in the plane]. Pry`kl. geometriya ta inzh. grafika. K.: KNUBA, 77, 36 - 42.
7. Chepizhny`j, A.V., Babka, V.M. (2012). Vy`znachennya polozhen` lanok ploskogo mexanizmu za dopomogoyu sy`stemy` try`granny`ka Frene [Determination provisions flat parts of the mechanism by means of Frenet-Serret formulas]. Pry`kladna geometriya ta inzhenerna grafika. K.: KNUBA, 90, 20 – 26.
8. Pilipaka, S.F. (2006). Teoriya skladnogo ruxu material'noyi tochky` na ploshhy`ni. Chasty`na persha. Absolyutni shvy`dkist` i trayektoriya [The theory of complex motion of a point on the plane. Part One. Absolute speed and trajectory]. Elektrotehnika i mexanika. K., 1, 84 – 94.
9. Pilipaka, S.F. (2006). Teoriya skladnogo ruxu material'noyi tochky` na ploshhy`ni. Chasty`na druga. Absolyutne pry`skorennya. Zadachi na dy`namiku tochky` [The theory of complex motion of a point on the plane. Part Two. The absolute acceleration. Tasks of the dynamics point]. Elektrotehnika i mexanika. K., 2, 88 – 100.
10. Chepizhny`j, A.V., Babka, V.M. (2012). Vy`znachennya polozhen` lanok ploskogo mexanizmu za dopomogoyu sy`stemy` try`granny`ka Frene [Determination provisions flat parts of the mechanism by means of Frenet-Serret formulas]. Pry`kladna geometriya ta inzhenerna grafika. K.: KNUBA, 90, 20 – 26.

**Пилипака С.Ф., Чепижный А.В. Определение положений и ускорений звеньев плоских**



### **механизмов с помощью трехгранника Френе**

Для определения траекторий движения отдельных точек, которые принадлежат звеньям плоского механизма, можно использовать сопровождающий трехгранник Френе траектории движения конца этого звена. Это дает также возможность определять векторы ускорений этих точек во время движения. В работе рассматривается ведомое звено механизма, которое шарнирно связано с ведущим – кривошипом. Общей траекторией движения концов этих двух звеньев является окружность, по которой с постоянной скоростью движется шарнир. Трехгранник Френе располагаем таким образом, что его начало совпадает с шарниром, орт главной нормали направлен вдоль кривошипа к центру окружности, а орт касательной касается к окружности. При вращении кривошипа трехгранник движется вдоль окружности и его главная нормаль совпадает с кривошипом.

В системе сопровождающего трехгранника конец ведомого звена совпадает с началом трехгранника, а само звено образует определенный угол с ортом касательной. При работе механизма этот угол меняется по определенному закону, то есть ведомое звено в системе трехгранника вращается вокруг начала с определенной угловой скоростью. Если известен закон поворота ведомого звена в системе трехгранника у функции длины дуги окружности – траектории шарнира, то можно за известными формулами определить траекторию, скорость и ускорение произвольной точки ведомого звена.

В работе на примере некоторых механизмов показано построение траекторий отдельных точек ведомого звена и нахождения их ускорений. При этом величина ускорения в зависимости от поворота кривошипа может быть показана на графике, а также непосредственно на траектории в соответствующей ей точке вектором в масштабе. Это дает возможность визуально оценить изменение ускорения за величиной и направлением вдоль траектории движения точки.

**Ключевые слова:** кривошип, ведомое звено, трехгранник Френе, траектория, ускорение.

### **Pylypaka S.F., Chepyzhniy A.V. Certain provisions and acceleration of planar mechanisms links with frenet trihedron**

To determine the trajectories of individual points, which belong to the flat links of the mechanism, you can use the accompanying trihedron Frenet trajectory end of this link. It also makes it possible to determine the acceleration vectors of these points while driving. The paper deals with the mechanism of the driven member, which is pivotally connected to the drive - crank. General path of movement of the two ends of the units is a circle on which moves at a constant velocity joint. Frenet trihedron have such a way that its origin coincides with the hinge, the unit vector directed along the principal normal crank to the center of the circle, and the unit vector tangent to the circumference of the concerns. By rotating the crank trihedron moves along a circle and its principal normal coincide with the crank.

The system accompanying trihedron end of the driven member coincides with the beginning of the trihedron and unit itself forms a certain angle with the unit vector tangent. When the mechanism for changing the angle of a certain law, that is, the driven member in the trihedron system revolves around the beginning with a certain angular velocity. If we know the law of rotation of the driven member in the system of the trihedron in arc length function - the trajectory of the hinge, it is possible to determine the known formulas of the trajectory velocity and acceleration of any point of the driven member.

The work by the example of some of the mechanisms shown in the construction of trajectories of individual points of the driven member and the location of their accelerations. The value of the acceleration as a function of crank angle may be indicated on the graph, as well as directly on the path to the point vector corresponding to it on the scale. This makes it possible to visually assess the change in acceleration of the magnitude and direction of motion of a point along a path.

**Key words:** crank, the driven member, Frenet trihedron, the trajectory, acceleration.