$A = (a_{nk})$ має властивість Бореля, якщо вона підсумовує майже всі послідовності з E до числа $\frac{1}{2}$.

Достатні умови для властивості Бореля дає наступна теорема.

<u>Теорема 6</u>. Для того щоб дійсна регулярна матриця $A = (a_{nk})$ мала властивість Бореля, достатньо збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^2)^q$ для деякого $q > 0$ [3, с. 241].

Справедлива наступна теорема.

<u>Теорема 7</u>. Матриця методу середніх арифметичних має властивість Бореля.

Доведення. За теоремою 6 маємо для $(C;1)$ –методу

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^2\right)^q = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\cdot(n+1)\right)^q = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^q}.$$

Останній ряд збіжний для довільного $q > 1$.

Теорему 7 доведено.

З останньої теореми випливає, що майже всі розбавлення ряду (1) нулями $(C;1)$ –підсумовуються до числа $\frac{1}{2}$. Оскільки множина усіх трансцендентних чисел відрізка $[0;1]$ має потужність континууму і міру Лебега 1, то послідовності двійкових розкладів трансцендентних чисел у деякому розумінні рівномірно заповнені нулями і одиницями.

Література.

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: ФМ, 1960. – 471 с.

В статье изложены исторические сведения о ряде $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, его роли в поисках обобщенной суммы ряда; исследованы вопросы мощности, меры и категории суммируемых и не суммируемых разбавлений ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ методами $(C,1)$ и Абеля-Пуассона.

In the article is presented the historical information about the number $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, its roles in search of the generalized summation of series; are investigated questions of power, measure and category of the summarized and not summarized dilutions of the number $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ by methods $(C,1)$ and Abel-Poisson.

УДК 517.17 (076.6)

В.Ф.Власенко, к.ф.-м.н., доцент, Сумський НАУ
А.М.Розуменко, к.ф.-м.н., доцент, Сумський НАУ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

“… все великие математики-мыслители всегда стремились “идеи заменить вычислениями”.
Н.Бурбаки

У статті проаналізовані причини труднощів у засвоєнні поняття границі послідовності дійсних чисел, наведені нетривіальні приклади розбіжних послідовностей, сформульовані узагальнення границі послідовності.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Поняття границі послідовності – основоположне поняття математичного аналізу. З нього власне і починається вивчення операції граничного переходу. В подальшому поняття границі послідовності узагальнюється на випадок границі функції однієї і кількох змінних. В диференціальному та інтегральному численні розглядаються границі відношень $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ та інтегральних сум Рімана і Дарбу. Виявляється, що всі ці різновидності границь <u>*принципово*</u> зводяться до границі послідовності. Звідси випливає значення цього поняття і необхідність його всебічного вивчення в курсі математичного аналізу. Досвід роботи зі студентами по опануванню границі послідовності показує, що більшість студентів засвоюють його формально і не можуть справитися з простими прикладами типу: навести для довільного наперед заданого раціонального числа r приклад послідовності (a_n), всі члени якої ірраціональні, а $\lim_{n\to\infty} a_n = r$. Або навести для довільного наперед заданого ірраціонального числа α приклад послідовності b_n, всі члени якої раціональні, а $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$. Або довести розбіжність послідовності $(\sin n)$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Причиною такого стану є, по-перше, мізерна кількість (4-6) годин на вивчення границі послідовності, а по-друге мала кількість прикладів середньої і вищої трудності на доведення розбіжності послідовностей. Звичайно обмежуються доведенням збіжності за означенням та основними теоремами про границю послідовності (арифметичні операції над збіжними послідовностями, границя проміжної послідовності, теореми про границю монотонної послідовності, граничний перехід у нерівностях). І майже нічого немає навіть у програмах з математичного аналізу про узагальнення границі самої послідовності. Такі узагальнення існують понад 150 років і складають значний розділ математичного аналізу – теорію підсумовування розбіжних послідовностей і рядів.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є ознайомлення з основними фактами цієї теорії та її застосуваннями.

Виклад основного матеріалу. Класичне означення границі послідовності. Перш за все нагадаємо означення послідовності дійсних чисел. Кажуть, що задана послідовність дійсних чисел (x_n), якщо існує правило (закон), за яким кожному натуральному числу n поставлено у відповідність єдине дійсне число x_n. При цьому числа $x_n, n \in N$ називають членами послідовності (x_n), число x_n називається n –им або загальним членом послідовності. Оскільки множина натуральних чисел N нескінченна, то і кожна послідовність (x_n) нескінченна. І вже тут виникає перша трудність у засвоєнні поняття послідовності. З одного боку ми повинні мислити послідовність (x_n) як один об'єкт, а з іншого боку ми повинні пам'ятати, що цей об'єкт складається з нескінченної множини чисел.

Інша трудність при вивченні послідовності полягає в тому, що в її означенні ніяк *не конкретизується* правило (закон), за яким кожному $n \in N$ ставиться у відповідність дійсне число x_n. Важливо, щоб таке правило (закон) *існувало*, а його конкретний зміст байдужий. Найчастіше це правило виражається формулою $x_n = f(n)$, де справа визначені ті операції над n, які треба виконати, щоб отримати x_n. Зокрема, кожному $n \in N$ можна поставити у відповідність одне і те ж число a. Отримаємо так звану *сталу* послідовність $a, a, \dots, a, \dots$.

Формула $x_n = (-1)^n$ дає послідовність $-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$ у якій на парних місцях стоїть 1, а на непарних (-1).

Формула $x_n = \frac{3n+7}{6n-1}$ задає послідовність $2, \frac{13}{11}, \frac{16}{17}, \frac{19}{23}, \frac{22}{29}, \dots$.

Формула $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, x_1 = x_2 = 1$ задає послідовність $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$.

Тут використане так зване рекурентне задання послідовності, коли для знаходження наступного члена треба використати попередні члени послідовності. В математиці вона відома як послідовність чисел Фібоначчі (*Фібоначчі – італійський математик XIII–го століття*). Ця послідовність описує спрощену схему розмноження кроликів. Цікаво, що вона виникає в математиці в самих несподіваних ситуаціях, наприклад, при обробці інформації за допомогою комп'ютерів, при пошуках оптимальних методів програмування, в геометрії. Детальніше про числа Фібоначчі можна дізнатися з книги [1]. Цікаво також і те, що числа Фібоначчі можна задати і формулою

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

В ряді випадків правило (закон) формулюють словесно. Так, не існує формули $x_n = f(n)$, яка задає послідовність $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$. Проте в ній ми узнаємо, що це послідовність простих чисел, записаних у порядку їх зростання. Відомо, що вона нескінченна, тобто не існує найбільшого простого числа.

Числова послідовність є найпростішим математичним об'єктом, на якому визначається основна операція математичного аналізу – операція граничного переходу. Почнемо з прикладу. Дослідження послідовності $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ показує, що її члени із зростанням n все менше і менше відрізняються від 1, а саме $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Цей факт ми виражаємо словами: члени послідовності $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ прямують (наближаються) до 1, а число 1 є границею послідовності $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ і пишемо $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Але вираз: члени послідовності прямують (наближаються) до 1 не має точного математичного змісту. Резонно запитати, що означають слова "члени послідовності прямують до 1"? Можна, посилаючись на інтуїцію, сказати, що це означає їх *__необмежене__* наближення до 1. Але це просто гра словами, оскільки невідомий точний зміст необмеженого наближення.

Вивчаючи послідовність $\left(\frac{n}{n+1}\right)$, бачимо, що *__віддаль__* між 1 і числами $\frac{n}{n+1}$ зменшується із зростанням n. Віддаль між дійсними числами a і b дорівнює $|a-b|$. Таким чином, $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|$ із зростанням n зменшується. Залишилось дати математичне формулювання словам "$|x_n-1|$ необмежено зменшується із зростанням n". Природно вважати, що $|x_n-1|$ необмежено зменшується із зростанням n, якщо для *__довільної наперед заданої віддалі__*, яку ми позначимо грецькою літерою ε, всі члени послідовності (x_n), починаючи з деякого номера, взагалі залежного від ε, який ми позначимо $n_0(\varepsilon)$, будуть на віддалі від 1, меншій за ε. Звичайно слово "віддаль" не вживається в означенні границі послідовності, а кажуть так:

"дійсне число a називається *__границею__* послідовності (x_n), якщо для *__довільного__* дійсного числа $\varepsilon>0$ *__існує__* номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для *__всіх__* номерів n, більших $n_0(\varepsilon)$, виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$".

Геометрично це означає, що для довільного ε–околу числа a існує номер $n_0(\varepsilon)$, починаючи з якого всі члени послідовності (x_n) належать цьому околу.

З цього означення випливає, що поза інтервалом $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ може знаходитися не більше $n_0(\varepsilon)$ членів послідовності (x_n), тобто поза ε–околом числа a можуть бути всі або деякі з членів $x_1,x_2,\dots,x_{n_0(\varepsilon)}$.

Той факт, що число a є границею послідовності (x_n), записують так: $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, або $x_n\to a\ (n\to\infty)$.

Переконатися, що число a є границею послідовності (x_n), означає, що для наперед заданого числа $\varepsilon>0$ можна знайти номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що для всіх $n>n_0(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$. Для $x_n=\frac{n}{n+1}$ це значить, що $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$, $\left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon$, $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$, $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$. Число $\frac{1}{\varepsilon}-1$ може бути не цілим. Тоді беруть його цілу частину $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$, оскільки натуральні числа, більші за $\frac{1}{\varepsilon}-1$ і натуральні числа, більші за $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ утворюють одну і ту ж множину.

З цього прикладу видно, що $n_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ залежить від ε, причому із зменшенням $\varepsilon>0$ номер $n_0(\varepsilon)$ взагалі збільшується. Для сталої послідовності $n_0(\varepsilon)=1$, оскільки $|a-a|<\varepsilon$ виконується для довільного натурального числа.

Приклади послідовностей

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\dots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\dots$$

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},-\frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},-\frac{1}{n},\dots$$

$$1,0,\ \frac{1}{2},0,\ \frac{1}{3},0,\dots,\frac{1}{n},\ 0,\dots$$

показують, що члени послідовності можуть прямувати до своєї границі 0 спадаючи, зростаючи, з обох сторін, не приймаючи граничного значення жодного разу, приймаючи граничне значення безліч разів.

Послідовність, що має границю, називається *__збіжною__*. Послідовність, що не має границі, називається *__розбіжною__*. Так, послідовність $((-1)^n)$ розбіжна.Справді, якщо припустити, що вона збіжна, то для $\varepsilon=\frac{1}{3}$ існує номер n_0, починаючи з якого виконується нерівність $|(-1)^n-a|<\frac{1}{3}$, звідки

$$a-\frac{1}{3}<(-1)^n<a+\frac{1}{3},\ \forall n>n_0,$$

$$a-\frac{1}{3}<1<a+\frac{1}{3}\text{ для парних } n>n_0$$

$$a-\frac{1}{3}<-1<a+\frac{1}{3}\text{ для непарних } n>n_0,$$

тобто числа 1 і -1 знаходяться в інтервалі $\left(a-\frac{1}{3};a+\frac{1}{3}\right)$, що неможливо, оскільки довжина цього інтервалу $\frac{2}{3}$, а віддаль між числами -1 і 1 дорівнює 2.

Корисними для засвоєння поняття границі послідовності є наступні завдання.

Довести, що коли $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. Чи справедливе обернене твердження?

Що можна сказати про суму, різницю і добуток двох розбіжних послідовностей? Навести відповідні приклади.

Що можна сказати про суму, різницю і добуток двох послідовностей, одна з яких збіжна, а друга – розбіжна? Навести відповідні приклади.

Чи можна з двох збіжних послідовностей утворити розбіжну послідовність? Навести відповідні приклади.

Наведемо більш складні приклади збіжних і розбіжних послідовностей.

Теорема 1. Послідовність, задана умовами $x_1 \geq \sqrt[p]{a}$, $a > 0$, $p \in N$, $p > 1$, $x_{n+1} = \frac{a+(p-1)\,x_n^p}{p\,x_n^{p-1}}$, збіжна, причому $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[p]{a}$.

Доведення. Переконаємося, що $x_n \geq \sqrt[p]{a}$ для $\forall n \in N$. Для $n = 1$ це випливає з умови. Припустимо,що $x_n \geq \sqrt[p]{a}$ і покажемо, що $x_{n+1} \geq \sqrt[p]{a}$. Послідовно маємо:

$$x_{n+1} - \sqrt[p]{a} = \frac{a+(p-1)\,x_n^p}{p\,x_n^{p-1}} - \sqrt[p]{a} = \frac{a+(p-1)\,x_n^p - p\sqrt[p]{a}\,x_n^{p-1}}{p\,x_n^{p-1}} = \frac{a - x_n^p + p\,x_n^{p-1}(x_n - \sqrt[p]{a})}{p\,x_n^{p-1}}.$$

Для спрощення обчислень позначимо $\sqrt[p]{a} = b$, тоді $a = b^p$ і

$$x_{n+1} - b = \frac{b^p - x_n^p + p\,x_n^{p-1}(x_n - b)}{p\,x_n^{p-1}} =$$

$$= \frac{(x_n - b)\left(p\,x_n^{p-1} - x_n^{p-1} - b\,x_n^{p-2} - \dots - b^{p-2}x_n - b^{p-1}\right)}{p\,x_n^{p-1}} =$$

$$= \frac{(x_n - b)\left(x_n^{p-1} - x_n^{p-1} + x_n^{p-1} - b\,x_n^{p-2} + \dots + x_n^{p-1} - b^{p-2}x_n + x_n^{p-1} - b^{p-1}\right)}{p\,x_n^{p-1}} =$$

$$= \frac{(x_n - b)^2\left(x_n^{p-2} + \dots + x_n^{p-3}(x_n + b) + \dots + \left(x_n^{p-2} + \dots + b^{p-2}\right)\right)}{p\,x_n^{p-1}} \geq 0.$$

Тут ми використали формулу для бінома $a^n - b^n$, а також додатність чисел x_n^k, b^k. За принципом повної математичної індукції маємо $x_n \geq \sqrt[p]{a}$ для $\forall n \in N$.

Переконаємось,що послідовність (x_n) монотонна:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a+(p-1)\,x_n^p}{p\,x_n^{p-1}} - x_n = \frac{a - x_n^p}{p\,x_n^{p-1}} \leq 0,$$

оскільки $x_n^p \geq a$. Отже послідовність (x_n) незростаюча і обмежена: $x_1 \geq x_n \geq \sqrt[p]{a}$. За теоремою про границю монотонної обмеженої послідовності вона збіжна. Позначимо $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. З нерівності $x_n \geq \sqrt[p]{a}$ за теоремою про граничний перехід у нерівностях маємо, що і $x \geq \sqrt[p]{a}$. Для знаходження x перейдемо у рівності $x_{n+1} = \frac{a+(p-1)\,x_n^p}{p\,x_n^{p-1}}$ до границі при $n \to \infty$. Будемо мати $x = \frac{a+(p-1)\,x^p}{p\,x^{p-1}}$, звідки $x = \sqrt[p]{a}$.

Теорему 1 доведено.

Приклад. Обчислити $\sqrt[3]{5}$.

Розв'язання. Тут $p = 3$, $a = 5$. Візьмемо $x_1 = 2$. Тоді $x_2 = \frac{5+2\cdot 2^3}{3\cdot 2^2} = \frac{21}{12} = 1{,}75$, $x_3 = \frac{5+2\cdot 1{,}75^3}{3\cdot 1{,}75^2} \approx 1{,}71$.

За таблицями В.М.Брадіса $\sqrt[3]{5} = 1{,}71$.

Зауважимо, що послідовність (x_n) досить “швидко” збігається до своєї границі.

Теорема 2. Послідовності $(\sin n)$, $(\cos n)$, $(tg\, n)$, $(ctg\, n)$ розбіжні.

Доведення. проведемо для послідовності $(\sin n)$. Для решти послідовностей доведення аналогічні.

Припустимо, що дана послідовність збіжна, $\lim_{n\to\infty} \sin n = a$. Тоді для $\forall k \in N$ і послідовності $(\sin(n+k))$ і $(\sin(n-k))$ також збіжні до числа a. Маємо:

$$\sin(n+k) = \sin n \cos k + \cos n \sin k,$$

$$\sin(n-k) = \sin n \cos k - \cos n \sin k.$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$:

$$a = a\cos k + b\sin k,$$

$$a = a\cos k - b\sin k,$$

де $b = \lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1-\sin^2 n}$.

Склавши останні дві рівності, отримаємо

$$2a = 2a\cos k,\quad a(1-\cos k) = 0.$$

Для $\forall k \in N$ $\cos k \neq 1$. Дійсно, якби $\exists k \in N$ таке, що $\cos k = 1$, то звідси мали б $k = \pm\arccos 1 + 2m\pi = 2m\pi$, $m \in Z$, $\pi = \frac{k}{2m}$, що неможливо для $\forall m \in Z$. Тому $a = 0$, $b = \pm 1$. З рівності $a = a\cos k + b\sin k$ маємо $\sin k = 0$, $k = \pm\arcsin 0 + 2m\pi$, що неможливо для $\forall m \in Z$.

Теорему 2 доведено.

Наслідок. Послідовності $(\sin \sqrt[k]{n})$, $(\sin n)^k$, $(\sqrt[k]{\sin n})$, $k \in N$, $k > 1$, розбіжні.

Пропонуємо читачеві довести розбіжності послідовностей $(\sin n^2)$, $(\cos n^2)$, $(tg\, n^2)$, $(ctg\, n^2)$, а також дослідити на збіжність послідовність $(\sin(c\sqrt{n^2+a}))$, $a, c \in N$, $a > 0$.

Часткові границі послідовності. Послідовність $((-1)^n)$ розбіжна, але її підпослідовності $((-1)^{2n})$ і $((-1)^{2n-1})$ збіжні відповідно до 1 і (-1). Числа 1 і (-1) називаються частковими границями послідовності $((-1)^n)$. Природно виникає питання про множину часткових границь розбіжної послідовності.

Означення. Дійсне число a або символи $\pm\infty$ називаються частковими границями послідовності (x_n), якщо існує підпослідовність (x_{n_k}) послідовності (x_n) така, що

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \text{ або } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \pm\infty.$$

Тут (n_k) – зростаюча підпослідовність натуральних чисел.

Наприклад, для послідовності $((-1)^n \cdot n)$ її частковими границями є символи $\pm\infty$, оскільки

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{2n} \cdot 2n = +\infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{2n-1} \cdot (2n-1) = -\infty.$$

Теорема 3. Множиною часткових границь послідовності усіх раціональних чисел є множина R усіх дійсних чисел і символи $\pm\infty$.

Доведення. Покажемо, що множину Q усіх раціональних чисел можна представити у вигляді послідовності, тобто числа множини Q можна занумерувати всіма натуральними числами.

0											
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	…
-1,	-2,	-3,	-4,	-5,	-6,	-7,	-8,	-9,	-10,	-11,	…
$\frac{1}{2}$,	$\frac{2}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{4}{2}$,	$\frac{5}{2}$,	$\frac{6}{2}$,	$\frac{7}{2}$,	$\frac{8}{2}$,	$\frac{9}{2}$,	$\frac{10}{2}$,	$\frac{11}{2}$,	…
$-\frac{1}{2}$,	$-\frac{2}{2}$,	$-\frac{3}{2}$,	$-\frac{4}{2}$,	$-\frac{5}{2}$,	$-\frac{6}{2}$,	$-\frac{7}{2}$,	$-\frac{8}{2}$,	$-\frac{9}{2}$,	$-\frac{10}{2}$,	$-\frac{11}{2}$,	…
$\frac{1}{3}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{3}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{6}{3}$,	$\frac{7}{3}$,	$\frac{8}{3}$,	$\frac{9}{3}$,	$\frac{10}{3}$,	$\frac{11}{3}$,	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\frac{1}{n}$,	$\frac{2}{n}$,	$\frac{3}{n}$,	$\frac{4}{n}$,	$\frac{5}{n}$,	$\frac{6}{n}$,	$\frac{7}{n}$,	$\frac{8}{n}$,	$\frac{9}{n}$,	$\frac{10}{n}$,	$\frac{11}{n}$,	…
$-\frac{1}{n}$,	$-\frac{2}{n}$,	$-\frac{3}{n}$,	$-\frac{4}{n}$,	$-\frac{5}{n}$,	$-\frac{6}{n}$,	$-\frac{7}{n}$,	$-\frac{8}{n}$,	$-\frac{9}{n}$,	$-\frac{10}{n}$,	$-\frac{11}{n}$,	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Одна з можливих нумерацій множини Q вказана вище. При такій нумерації не буде пропущене жодне раціональне число $r = \frac{m}{n}$, де $m \in Z,\ n \in N$.

Оскільки кожне дійсне число a є границею деякої послідовності раціональних чисел, то звідси випливає, що множиною часткових границь послідовності раціональних чисел є множина R усіх дійсних чисел і символи $\pm\infty$.

Теорему 3 доведено.

Аналогічними міркуваннями можна показати, що послідовність раціональних чисел довільного проміжку $\langle a, b\rangle$ має своєю множиною часткових границь проміжок $[a, b]$.

<u>Теорема 4.</u> Множиною часткових границь послідовностей $(\sin n)$, $(\cos n)$ є відрізок $[-1, 1]$.

<u>Доведення</u> дивись у [2, с. 30 і 118].

З теореми 4 випливає теорема 2.

Збіжну послідовність можна вважати такою, що має одну скінченну часткову границю.

З теорії функцій відомо, що потужність множини Q менша за потужність множини R, а потужність довільного проміжку $\langle a; b\rangle$ така, як і потужність R, тобто континуальна.

З теорем 3 і 4 випливає, що потужність множини часткових границь може бути вищою за потужність множини чисел послідовності.

Узагальнення границі послідовності. Послідовність $((-1)^n)$ розбіжна, а послідовність її середніх арифметичних $t_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ збіжна до числа 0.

Дійсно,

$$t_n = \frac{(-1)\ \ +(-1)^2+\cdots+(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0, \text{якщо } n = 2k \\ -\frac{1}{n}, \text{якщо } n = 2k-1,\ k \in N \end{cases}$$

, має границю нуль. Число нуль вважається узагальненою границею розбіжної послідовності $((-1)^n)$. Якщо послідовність (x_n) збіжна до числа a, то і послідовність (t_n) також збіжна, тобто середні арифметичні дійсно узагальнюють поняття границі послідовності. Вони були історично першим узагальненням границі послідовності.

Досить швидко з'явилось багато узагальнень границі послідовності, наприклад:

$$t_n = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \quad (1)$$

$$t_n = \frac{p_1 x_n + p_2 x_{n-1} + \cdots + p_n x_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \quad (2)$$

де $p_1 > 0,\ p_n \geq 0,\ \forall n > 1$.

Узагальнення (1) належить Ріссу, узагальнення (2) ввели незалежно один від одного український математик Г.Ф.Вороний (1868-1908) у 1902 р. і норвезький математик Нерлунд у 1919 р. Стаття Г.Ф.Вороного являє собою коротку примітку в рідкісному виданні і стала відомою завдяки її перекладу на англійську мову в 1932 р. Тамаркіним.

Якщо $p_n = C_{n+k-1}^{k-1}$, то маємо узагальнення границі послідовності, запропоноване італійським математиком Чезаро (1859-1906) у 1890 р.

Поступово математики знайшли загальні теореми про узагальнені методи підсумовування розбіжних послідовностей. При цьому були розв'язані такі задачі: якщо послідовності (x_n) приписується узагальнена границя a, а послідовності (y_k) - узагальнена границя b, то послідовності $(\alpha x_n + \beta y_n)$, де α, β - довільні дійсні числа, повинна приписуватись узагальнена границя $\alpha a + \beta b$. Це властивість *лінійності* узагальненої границі.

Природно, узагальнена границя повинна включати класичне означення границі, тобто збіжна послідовність повинна мати ту ж саму узагальнену границю. Це властивість *регулярності* узагальненої границі.

Узагальнені границі (1) і (2) є частинними випадками узагальнення границі послідовності за допомогою матриці $A = (a_{nk})$, яка перетворює послідовність (x_n) у послідовність (t_n) за формулами

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad n \in N. \quad (3)$$

Якщо всі ряди справа у (3) збіжні для заданої послідовності (x_n) і існує $\lim_{n\to\infty} t_n = a$, то число a називають узагальненою границею послідовності (x_n) і пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ (A).$$

Умови регулярності матриці A даються наступною теоремою Сільвермана-Сасса.

Теорема 5. Для регулярності матриці $A = (a_{nk})$ необхідно й достатньо виконання умов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \le \mathrm{M} \text{ для } \forall n > n_0,$$

$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ для довільного фіксованого k,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1.$$

Доведення цієї теореми можна знайти в [3, с. 74-79], або в [4, с. 62-66].

Матриця A, що задовольняє умови теореми 5, називається Т-матрицею.

Так, для узагальнення (1)

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_k}{p_1+p_2+\dots+p_n}, & \text{якщо } 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{якщо } k > n \end{cases}.$$

Для узагальнення (2)

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k+1}}{p_1+p_2+\dots+p_n}, & \text{якщо } 1 \le k \le n, \\ 0, & \text{якщо } k > n \end{cases}.$$

Приклад. Вище було показано, що послідовність $(\sin n)$ розбіжна. Розглянемо її середні арифметичні

$$t_n = \frac{\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n}{n}.$$

Використаємо рівність $\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n = \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$ [5, с.402].

Тоді $t_n = \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n \cdot 2\sin\frac{1}{2}} \to 0 \ (n \to \infty)$, оскільки $\left|\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right| \le 2$, а $\sin\frac{1}{2} > 0$. Отже, узагальнена границя послідовності $(\sin n)$ існує і дорівнює нулю.

Відзначимо ще кілька фактів про узагальнені границі послідовностей.

Теорема 6. Для довільної Т-матриці $A = (a_{nk})$ існує обмежена послідовність (x_n), яка не має A-границі.

Доведення дивись [3, с. 93-94].

Теорема 7. Довільна скінченна або нескінченна часткова границі послідовності (x_n) є узагальненою границею (x_n) для деякої додатної Т-матриці.

Доведення розглянемо для випадку скінченної часткової границі x послідовності (x_n). Тоді існує послідовність (x_{n_k}), збіжна до числа x. Розглянемо додатну Т-матрицю $A = (a_{nk})$, у якої $a_{n,n_k} = 1$ для $n_k \le n < n_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, $a_{nk} = 0$ для інших n і k. Тоді $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = x_{n_k} \to x \ (k \to \infty)$.

Випадок, коли $x_{n_k} \to \pm\infty$ дивись [3, с. 94-95].

Висновки. В статті проаналізовані причини труднощів у засвоєнні поняття границі послідовності дійсних чисел, наведені нетривіальні приклади розбіжних послідовностей, сформульовані узагальнення границі послідовності.

Додаток

Таблиця основних границь послідовностей

1. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, якщо $|q| < 1$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt{n+b}\right) = 0$
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $0 < a \ne 1$
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$
8. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, $\alpha > 0, a > 1$
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$, $0 < a \ne 1$
10. $\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1$

Література

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1978. – 139 с.

2. Очан Ю.С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. – М.: Просвещение, 1965. – 231 с.
3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 471 с.
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2. – М. Наука, 1966. – 800с.

В статье проанализированы причины трудностей в изучении предела последовательности действительных чисел, приведены нетривиальные примеры расходящихся последовательностей, сформулированы обобщения предела последовательности.

In the article reasons of difficulties are analysed in the study of limit of sequence of the real numbers, the non-trivial examples of going away sequences are resulted, formulated oboscheniya limit of sequence.