

ПУТЕШЕСТВИЕ БРАХИСТОХРОНЫ

При помощи вариационного метода на основе уравнения Эйлера-Лагранжа определена форма направляющей лопасти центробежного разгонного устройства, при которой твердая частица перемещается между двумя заданными точками центробежного поля в минимальное время.

Ключевые слова: центробежное поле, брахистохрона, дифференциальное уравнение, уравнение Эйлера-Лагранжа, условие Лежандра.

Введение.

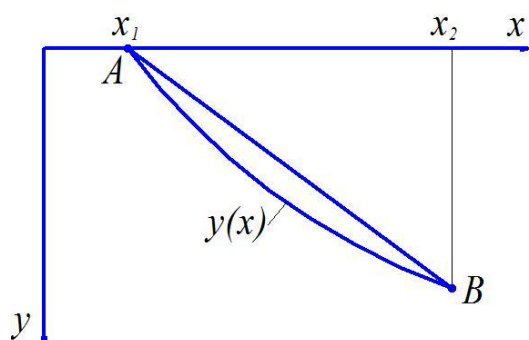
Поиском экстремумов функционалов ученые занимаются со времени появления дифференциального и интегрального исчисления. В истории науки видны следы этих поисков при решении самых разных задач. Одной из таких задач является задача об отыскании формы кривой скорейшего спуска в поле сил тяжести, которую пытался решить Галилей еще в 16 веке. Среди множества плоских кривых, соединяющих две точки, лежащие в одной вертикальной плоскости, следовало найти ту, двигаясь по которой под действием только сил тяжести, материальное тело из верхней точки достигает нижнюю точку за кратчайшее время. Такая линия называется брахистохроной (от греческого слова, которое в переводе означает «кратчайший»). Галилей ошибался, считая, что это должна быть дуга окружности. Впервые эту задачу в 1696 году решил И. Бернулли. Наименьшее время ската он находил в виде минимума интеграла

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v},$$

где x_1 и x_2 – координаты точек A и B (рисунок 1);

s – путь, проходимый материальной точкой;

v – скорость движения, которая в общем случае переменная.



**Рисунок 1. – Брахистохрона
в поле сил тяжести**

Если прямая AB представляет собой кратчайший путь между точками A и B , то найденная И. Бернулли кривая $y(x)$ – брахистохрона в поле тяжести. Это оказалась циклоида с горизонтальным основанием. Следует отметить, что еще в 1659 году Гюйгенс показал, что циклоида является решением задачи о таутохроне – кривой, для которой время, затраченное частицей, скользящей по

ней вниз под действием однородной силы тяжести, в самой нижней точке не зависит от выбора начальной точки. Задачами поиска экстремумов функционалов занимались почти все известные ученые: Эйлер, Лагранж и другие. После И. Бернулли задачу о брахистохроне в поле сил тяжести решали Исаак Ньютон, Якоб Бернулли, Г.В. Лейбниц, Г.Ф. Лопиталь, Э.В. Чирнхаус - каждый своим методом. Как известно, метод решения, полученный И. Ньютоном, лег в основу важнейшей отрасли естествознания – вариационного исчисления.

Кроме поля сил тяжести, действующего на материальные тела около поверхности Земли и которое можно отнести к одному из параллельных силовых полей, существует еще и поле сил тяжести, вызываемое гравитационной массой, сосредоточенной в некоторой фиксированной материальной точке. Оно аналогично центробежному полю вокруг вращающегося тела с той разницей, что вектор силового воздействия в этом случае направлен от центра поля и называется центробежной силой, в то время как в поле сил тяжести он имеет противоположное направление и называется центростремительной силой. Это два вида так называемых центральных силовых полей, а именно вталкивающее и выталкивающее силовые поля. Впоследствии задача о брахистохроне в параллельном поле была решена также для случаев, когда движение материальной точки происходит по некоторой поверхности, например, цилиндрической или конической. Это уже не плоские, а пространственные задачи [1]. Известна также работа, посвященная исследованию свойств брахистохроны в поле сил тяжести при действии разгоняющей силы и сил трения [2].

Задача о брахистохроне в центральном поле тяготения также сводится к исследованию на минимум функционала времени, для чего рекомендованы численные методы [4]. Известны также работы, например [5], посвященные отысканию необходимых траекторий и в центробежном поле. Однако там речь идет о нахождении некоторых оптимальных траекторий, но не о брахистохроне.

Задача о брахистохроне имеет много вариаций. В этой кривой заложены принципы самой природы. Как известно, принцип Ферма состоит в том, что свет всегда проходит расстояние за кратчайшее время. Именно исходя из законов оптики, И.Бернулли и нашёл свою циклоиду. Можно рассматривать движение частиц под действием самых разнообразных сил также и в силовых полях различных конфигураций, например, в электромагнитных полях. Так, в ядерной физике реакция между элементарными частицами, точнее, поведение ядерной реакции вблизи так называемого резонансного значения энергии описывается брахистохроной – Брейта – Вигнера формулой, предложенной Г. Брейтом и Ю. Вигнером в 1936 году [3]. Эта формула позволяет определить вероятность ядерной реакции в зависимости от энергии бомбардирующей частицы, вызывающей данную реакцию.

Центробежные роторные механизмы нашли широкое применение в качестве вентиляторов, насосов и компрессоров, а также для сообщения скорости твердым частицам, например, в дробеметных аппаратах для очистки или упрочнения поверхностей деталей, разбрасывателях минеральных

удобрений, сушильных, сепаратных и перемешивающих устройствах. Разгон частиц материала во всех этих случаях производится при помощи лопастей вращающегося ротора. Этот же принцип использован и в конструкции центрифуги рассеивающего типа [6], где самофугование частиц происходит во время их вращения относительно собственных центров тяжести при вылете из ротора, и в других конструкциях. Во всех перечисленных случаях большое значение имеет форма направляющих лопаток в зависимости от решаемых задач, из которых наиболее важными являются обеспечение нужной производительности, скорости частиц на выходе или минимального износа поверхности лопаток. Во многих случаях существенное влияние на указанные параметры оказывает время движения разгоняемой частицы вдоль направляющей лопатки. Поэтому задача об отыскании формы брахистохроны в центральном центробежном силовом поле является актуальной и имеющей большое прикладное значение. Это вопрос не только производительности соответствующего аппарата, он касается, прежде всего, взаимодействия скользящей массы с материалом основы. Принудительное движение должно быть максимально приближенным к естественному процессу, отражающему гармонию и рациональность природных явлений, в которых действует закон минимума энергетических потерь. Таким образом, можно предположить, что изогнутая в форме брахистохроны лопатка будет наилучшей во всех отношениях.

Попытка найти уравнение брахистохроны в центробежном поле была предпринята в 1982 году [7]. Были получены уравнения в полярных координатах и определены границы их применимости для практических целей. В данной работе приводятся некоторые уточнения и более подробное решение задачи о брахистохроне в центробежном поле, а также результаты исследования свойств этой кривой при различных исходных параметрах.

Основная часть.

Пусть произвольная направляющая AB вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно неподвижного центра O (рисунок 2). Материальное

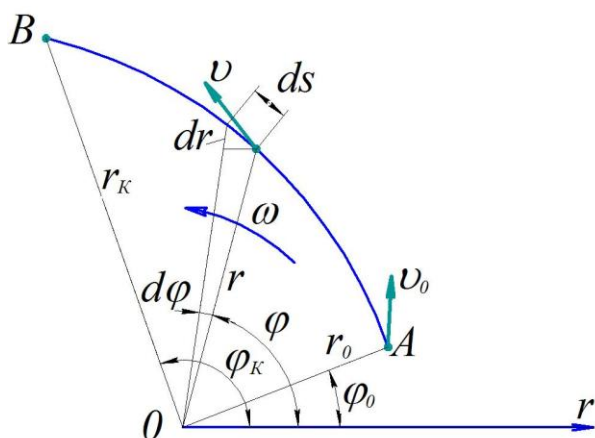


Рисунок 2. – Кривая движения частицы в центробежном поле

тело, попадая на эту направляющую в точке A с начальной относительной скоростью v_0 движется под действием центробежной силы вдоль направляющей и при отсутствии трения его скорость в произвольной точке будет

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2(r^2 - r_0^2)}, \quad (1)$$

где r_0 – начальный радиус-вектор движущейся точки, занимающий положение под углом φ_0 к оси Or ; r – текущее значение радиуса-

вектора под углом φ к оси Or .

Функция $r = r(\varphi)$ кривой АВ и ее производная $r' = dr/d\varphi$ неизвестны. Выражение для бесконечно малой дуги ds , соответствующей центральному углу $d\varphi$, будет

$$ds = \sqrt{(rd\varphi)^2 + dr^2} = \sqrt{(r^2 - r'^2)d\varphi}. \quad (2)$$

Время перемещения тела из точки А в точку В

$$t = \int_0^{tk} \frac{ds}{v}$$

С учетом выражений (1) и (2) находим

$$t = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_k} f(\varphi) d\varphi, \quad (3)$$

$$\text{где } f(\varphi) = \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{r^2 - k^2}}; \quad k = \frac{\sqrt{\omega^2 r_0^2 + v_0^2}}{\omega}.$$

Необходимо найти минимум этого интеграла. Для этого должно выполняться условие Эйлера-Лагранжа:

$$f(\varphi) - r' \frac{df(\varphi)}{dr'} = C.$$

Это уравнение после дифференцирования принимает вид:

$$r^2 = C \sqrt{r^2 - r'^2} \sqrt{r^2 - k^2}. \quad (4)$$

Для того чтобы искомая экстремаль давала минимум определенному интегралу, должно выполняться условие Лежандра, требующее неотрицательности второй частной производной от функции $f(\varphi)$ по r' .

$$\frac{df(\varphi)}{dr'} = \frac{r'}{\sqrt{(r^2 + r'^2)(r^2 - k^2)}} = \frac{Cr'}{r^2}; \quad \frac{d^2 f(\varphi)}{(dr')^2} = \frac{C}{r^2}.$$

Поскольку $r^2 > 0$, следовательно, постоянная C должна быть положительной. Из уравнения (4) получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r}{C} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - k^2} - C^2},$$

которое приводится к виду:

$$d\varphi = C \left(\frac{rdr}{k^2 \sqrt{ar^4 + br^2 + c}} - \frac{dr}{r \sqrt{ar^4 + br^2 + c}} \right),$$

$$\text{где } a = \frac{1 - C^2}{k^4}; \quad b = \frac{2C^2 - 1}{k^2}; \quad c = -C^2.$$

Интеграл первого слагаемого для $d\varphi$ находим, понижая степень подкоренных трехчленов подстановкой $r^2 = x$, выделяя затем полный квадрат от $(x + \frac{b}{2a})$ и делая подстановку $t = x + \frac{b}{2a}$. В результате получим:

$$d\varphi = \frac{C}{2k^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{C}{2k^2\sqrt{a}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}} = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t^2 + m^2}},$$

где $m^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{k^4}{4(1-C^2)^2}$.

Для случая $C < 1$, приняв $m = \frac{k^2}{z(1-C^2)}$, с использованием подстановки $t = mu$ и

$u = 0,5(z + 1/z)$, где $z = u + \sqrt{u^2 - 1}$, находим:

$$d\varphi = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \cdot \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \cdot \frac{dz}{z}$$

или $\varphi_1 = \int d\varphi = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \ln|z| = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + A_1$

где $u = \frac{t}{m} = 2(1-C^2) \frac{r^2}{k^2} + 2C^2 - 1$

В случае, когда $C > 1$

$$d\varphi = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{t^2 - m^2}} = \frac{C}{2\sqrt{C^2 - 1}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{m^2 - t^2}}$$

и тогда $\varphi_2 = \frac{-C}{2\sqrt{C^2 - 1}} \arcsin u + A_2$,

где $u = \frac{t}{m} = 2(1-C^2) \frac{r^2}{k^2} + 2C^2 - 1$.

Второе слагаемое для $d\varphi$ после интегрирования дает одинаковый результат как для $C < 1$, так и для $C > 1$. Решение получаем с использованием подстановок: $r^2 = x$ и $x = 1/t$, выделением полного квадрата от $\left(t + \frac{b}{2c}\right)$, а также при помощи последующей постановки $p = t + b/2c$:

$$d\varphi = \frac{Cdx}{2x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{-Cdt}{2\sqrt{c} \cdot \sqrt{\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}} = \frac{-dp}{2\sqrt{-1} \cdot \sqrt{p^2 + n^2}} = \frac{-dp}{2\sqrt{n^2 - p^2}},$$

где $n^2 = \frac{a}{c} - \frac{b^2}{4c^2} = -\frac{1}{4k^4 C^4}$.

Тогда $\varphi_3 = -\frac{1}{2} \arcsin v + D$

где $v = \frac{p}{n} = \frac{\frac{1}{r^2} + \frac{b}{2c}}{\frac{1}{2k^2 C^2}} = 1 - 2C^2 \left(1 - \frac{k^2}{r^2}\right)$.

Таким образом, имеем два решения:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + \frac{1}{2} \arcsin v + C_1 \text{ при } C < 1;$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{-C}{2\sqrt{C^2 - 1}} \arcsin u + \frac{1}{2} \arcsin v + C_2 \text{ при } C > 1,$$

где постоянные интегрирования $C_1=A_1-D$ и $C_2=A_2-D$ находятся из граничных условий например, $(\varphi=0, r=r_0)$. Постоянную C можно найти из граничного условия (φ_1, r_1) .

Так как при $C=1$ имеем особое решение, рассмотрим этот случай отдельно. Принимая $C=1$ в исходном дифференциальном уравнении, получим:

$$d\varphi = \frac{1}{kr} \sqrt{r^2 - k^2} dr$$

или после интегрирования

$$\varphi = \frac{1}{k} \sqrt{r^2 - k^2} - \arccos \frac{k}{r} + C_3.$$

Результаты исследований

Исследуя полученные решения, убеждаемся, что угол φ с увеличением r и C монотонно возрастает. Тогда из граничного условия (φ_1, r_1) получим

$$\varphi_{r=r_1} = \sqrt{\frac{r_1^2}{k^2} - 1} - \arccos \frac{k}{r_1}.$$

Далее, сравнивая полученную величину $\varphi_{r=r_1}$ с углом φ_1 , определяющим конечную точку брахистохроны, заданную условиями задачи, можно решить вопрос о выборе нужного уравнения. Если $\varphi < \varphi_{r=r_1}$, необходимо применять первое решение, соответствующее $C < 1$. При $\varphi > \varphi_{r=r_1}$ используется второе решение ($C > 1$). Наконец, если $\varphi = \varphi_{r=r_1}$, искомым будет третье решение, соответствующее $C=1$. Если в первом решении постоянная C может быть в пределах $0 < C < 1$, то второе решение имеет ограниченную область применения, что вытекает из условий существования $\arcsin u$ и $\arcsin v$.

На практике наиболее часто встречаются случаи, когда материальная частица попадает в центробежное поле на расстоянии r_0 от его центра, а ее начальной скоростью v_0 можно пренебречь. Тогда $k=r_0$ и отношение r/k в уравнениях брахистохроны будет равно r/r_0 . Постоянные интегрирования в

полученных уравнениях в этом случае будут: $C_1 = -\frac{\pi}{4}$; $C_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 - 1}} - 1 \right)$;

$C_3 = 0$, а условие существования $\arcsin u$ принимает вид: $\frac{r}{r_0} \leq \frac{C}{\sqrt{C^2 - 1}}$, что после

подстановки в уравнение $\varphi = \varphi(r)$ и исключения постоянной C дает

$$\varphi_1 \geq \frac{\pi}{2} \left(\frac{r_1}{r_0} - 1 \right).$$

Уравнения брахистохроны в случае $v_0=0$ будут:

$$\varphi = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + \frac{1}{2} \arcsin v - \frac{\pi}{4} \text{ при } C < 1;$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin v - \frac{C}{2\sqrt{C^2 - 1}} \arcsin u + \frac{\pi}{4} \left(\frac{C}{\sqrt{C^2 - 1}} - 1 \right) \text{ при } C > 1;$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} - \arccos \frac{r_0}{r} \text{ при } C=1,$$

где $u = 2(1 - C^2) \frac{r_0^2}{r^2} + 2C^2 - 1$; $v = 1 - 2C^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$.

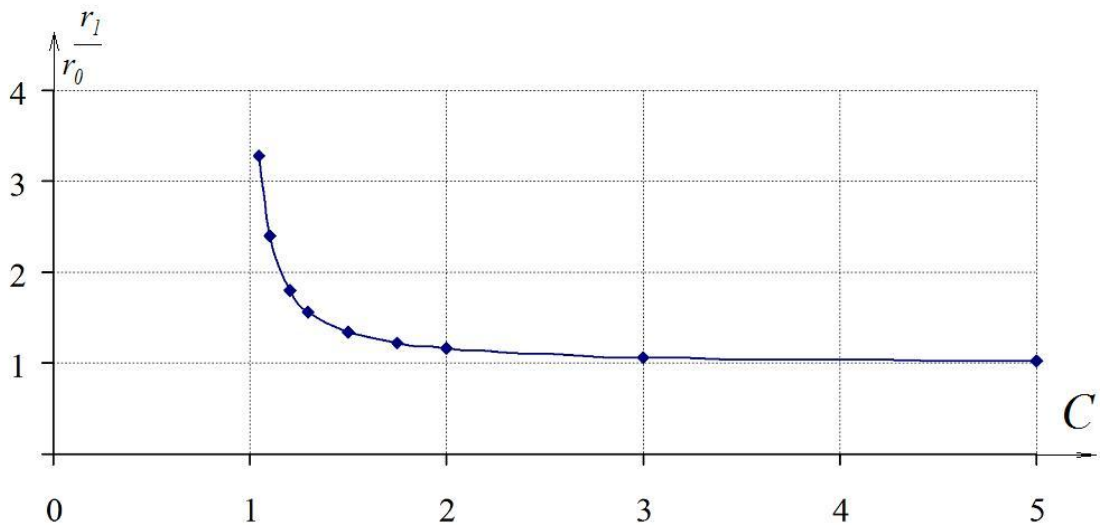
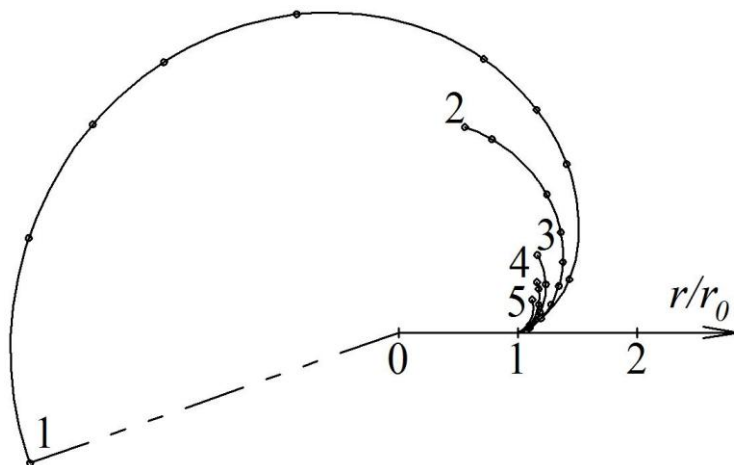


Рисунок 3. – Предельные значения постоянной C в уравнении $\varphi=\varphi(r)$ при $C>1$

На рисунке 3 представлен график, определяющий предельное значение постоянной C в зависимости от отношения r_1/r_0 , из которого следует, что при $r/r_0 > 1$ постоянная C тем более ограничена, чем больше отношение r/r_0 . Кроме этого, из рисунка 4 видно, что кривизна брахистохрон, соответствующих

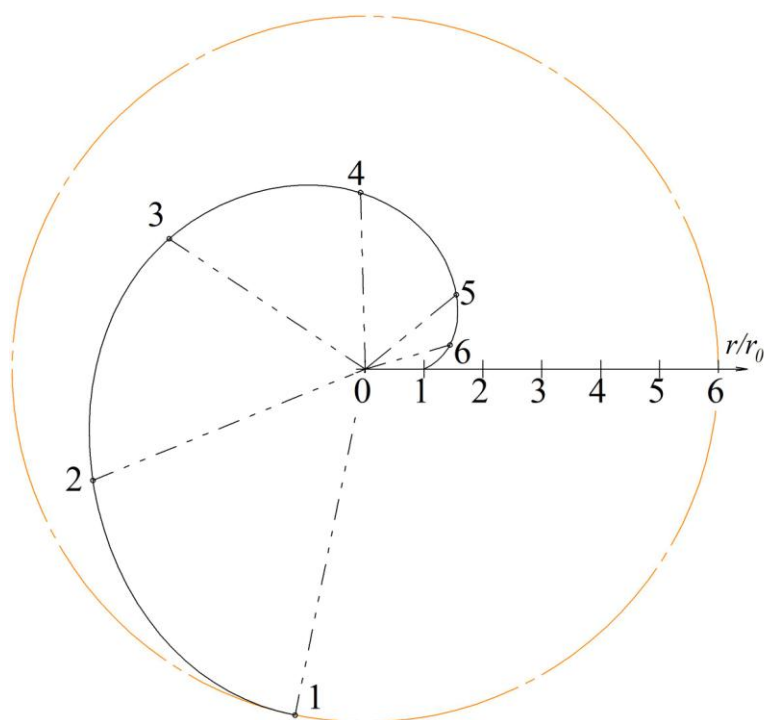


1 – $C=1,05$; 2 – $C=1,2$; 3 – $C=1,5$; 4 – $C=1,7$; 5 – $C=2$

Рисунок 4. – Брахистохроны при $C>1$

значениям $C>1$, сильно возрастает при приближении к точке (r_0, φ_0) , а касательная к кривой составляет с радиальным направлением слишком большой угол. Поэтому при разгоне твердых частиц возможно заклинивание материала на поверхности направляющих лопастей даже при небольшом

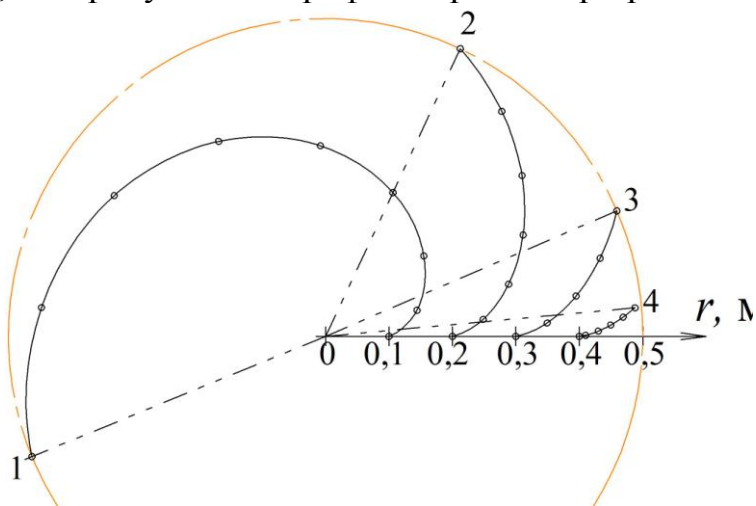
коэффициенте трения. Это настолько очевидно, что нет необходимости в определении условий отсутствия заклинивания. Однако при незначительной работе сил трения, например, в случае газообразного рабочего тела, такой профиль лопатки может быть рациональным, так как он обеспечивает большую абсолютную скорость на выходе, а следовательно, и напор газообразного потока.



1 – $\varphi=258,56^0$; $r/r_0=6$; 2 – $\varphi=202,23^0$; $r/r_0=5$; 3 – $\varphi=146,38^0$; $r/r_0=4$;
4 – $\varphi=91,53^0$; $r/r_0=3$; 5 – $\varphi_1=39,24^0$; $r/r_0=2$; 6 – $\varphi_1=15,87^0$; $r/r_0=1,5$

Рисунок 5. – Брахистохрона при $C=1$ в относительных координатах r/r_0

Для практических целей более приемлемым является случай, когда $C=1$. На рисунке 5 представлен профиль такой брахистохроны в относительных координатах r/r_0 , а на рисунке 6 – профили кривых при разных значениях r_0 .

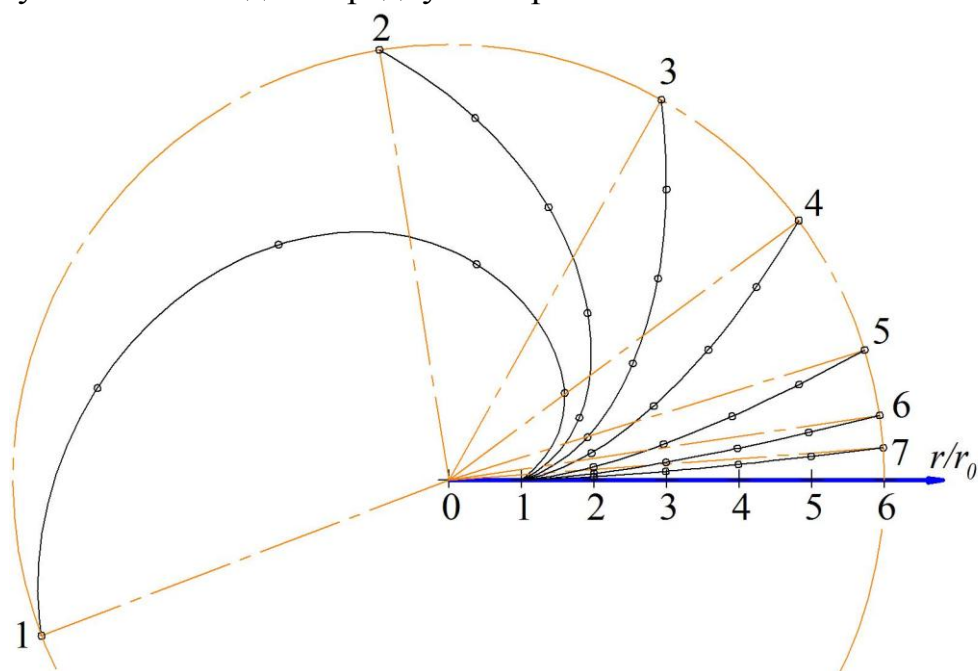


1 – $\varphi_1=202,23^0$; $r_0=0,1\text{м}$; 2 – $\varphi_1=64,86^0$; $r_0=0,2\text{м}$; 3 – $\varphi_1=23,26^0$; $r_0=0,3\text{м}$;
4 – $\varphi_1=6,10^0$; $r_0=0,4\text{м}$

Рисунок 6. – Профили направляющих при $C=1$ и различных значениях r_0

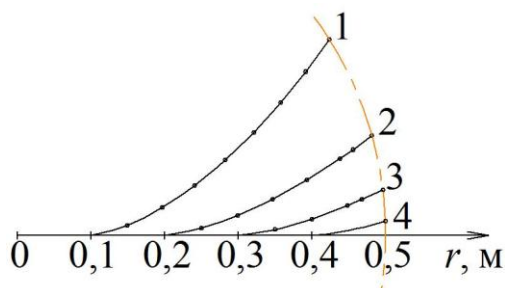
Наиболее приемлемым на практике является случай, когда $C<1$. На рисунке 7 показана брахистохрона в относительных координатах r/r_0 при разных значениях C , а на рисунке 8 – брахистохроны в натуральных размерах. Очевидно, что с уменьшением φ и C кривизна кривой уменьшается и при $\varphi \rightarrow 0$ и $C \rightarrow 0$ брахистохрона приближается к радиальной прямой. Следовательно,

линия наибыстрейшего перемещения материального тела в центробежном поле между двумя точками одного радиуса – прямая.



- 1 – $\varphi_1=200,88^\circ$; $C=0,976$; 2 – $\varphi_1=99,13^\circ$; $C=0,8$; 3 – $\varphi_1=60,79^\circ$; $C=0,6$;
 4 – $\varphi_1=36,59^\circ$; $C=0,4$; 5 – $\varphi_1=17,37^\circ$; $C=0,2$; 6 – $\varphi_1=8,58^\circ$; $C=0,1$;
 7 – $\varphi_1=4,28^\circ$; $C=0,05$

Рисунок 7. – Брахистохроны в относительных координатах при $C < 1$



- 1 – $\varphi_1=32,13^\circ$; $r_0=0,1$ м; 2 – $\varphi_1=15,69^\circ$; $r_0=0,2$ м; 3 – $\varphi_1=7,09^\circ$; $r_0=0,3$ м;
 4 – $\varphi_1=1,62^\circ$; $r_0=0,4$ м

Рисунок 8. – Брахистохроны при $C=0,4$ и разных значениях r_0

Закключение.

Проведенные исследования показывают, что профиль разгонных лопастей центробежных устройств в форме брахистохроны едва ли можно считать наиболее рациональным, несмотря на некоторое очарование этой кривой, возникшее в научном мире последнее время. Кривизна лопатки на выходе из ротора, хотя и уменьшается по сравнению с кривизной в начале движения, однако приводит к увеличению нормальной силы, а следовательно и к увеличению сил трения. При определенных условиях возможно даже заклинивание материала. Как видно из рисунке 7, эти явления снижаются, когда профиль лопатки приближается к прямолинейному. С другой стороны, точное изготовление лопастей в форме брахистохрон требует более дорогой

технологии, что не может быть оправдано незначительным выигрышем во времени движения частиц. Поэтому применение лопаток в центробежных разгонных устройствах в форме брахистохроны или в виде другого криволинейного профиля может быть оправдано только в отдельных случаях, например, в конструкциях центробежных насосов, вентиляторов или турбин.

Литература

1. Поверхностные брахистохроны. Электронный ресурс: <http://oasdv.narod.ru/Brachistochron.pdf>.
2. Вандухов А.С. Брахистохрона при действии разгоняющей силы, а также сухого и вязкого трения. Автореферат диссертации на соискания ученой степени кандидата физико-механических наук, МГУ им. М.В. Ломоносова. Электронный ресурс: <http://mech.math.msu.su/~snark/files/diss/0138auto.pdf>.
3. Формула Брейта-Вигнера. Большая советская энциклопедия. Электронный ресурс. Режим доступа: http://endic.ru/enc_sovet/Breta---vignera-formula-55679.html
4. Задача о брахистохроне в центральном поле тяготения. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://home.imm.uran.ru/iagsoft/brach/netrad.html>
5. Шатохин В.М., Шатохина Н.В. Оптимальные траектории точки, перемещающейся под действием центробежной силы инерции. Харьковский политехнический институт. Статья в журнале «Восточно-европейский журнал передовых технологий». Издательство «Технологический центр», Харьков, том. 4. № 7(58), стр. 9-14.-2012.
6. Холин Б.Г., Татьянченко Б.Я. Способ центрифугирования зернистых материалов и фактор разделения центрифуги. «Теоретические основы химической технологии», №3, т. III, 1979.
7. Холин Б.Г., Татьянченко Б.Я. Брахистохрона в центробежном поле. «Известие Вузов. Машиностроение», №2. Изд-во МВТУ им. Баумана, М., 1982.