УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЙ І ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК, ЩО ПЕРЕБУВАЮТЬ У СКЛАДНОМУ РУСІ, НА ПРИКЛАДІ ВЕДЕНОЇ ЛАНКИ ПЛОСКОГО МЕХАНІЗМУ

Пилипака С.Ф., д.т.н., професор, Національний університет біоресурсів і природокористування України.
Чепіжний А.В., к.т.н., Сумський національний аграрний університет

Ланки плоского механізму зв’язані між собою, відповідно і їх швидкості в кожен момент часу теж перебувають у певній залежності. Якщо кінці прямолінійної ланки рухаються по певних траєкторіях і з певними швидкостями, то в кожен момент часу проекції швидкості кінців ланки на саму ланку є рівними. При аналітичному описі закону руху ланки плоского механізму саме цей факт є визначальним для перевірки правильності цього аналітичного опису. Тригранник і формули Френе можна з успіхом застосувати для знаходження швидкості будь-якої точки ланки плоского механізму.

Ключові слова: плоский механізм, кривошип, ведена ланка, рухомий тригранник Френе, відносний рух точки, траєкторія, швидкість.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Кінематичний аналіз плоских механізмів припускає знаходження положень його ланок, траєкторій окремих точок, їх швидкостей і прискорень. Тривалий час ці розрахунки проводилися графічними й графоаналітичними методами, включаючи графічне диференціювання функції у вигляді кривої, а також графічне інтегрування. Поява комп'ютерних технологій дозволила виконувати цю роботу на новому рівні із залученням аналітичного апарата.

У якості одного з можливих підходів у даній статті пропонується застосувати дві системи координат: рухому - супровідний тригранник кола (траєкторії руху кінця кривошипа) і нерухому систему координат. Кут повороту тригранника відносно нерухомої системи координат відомий: він дорівнює куту повороту кривошипа. Положення вершини тригранника в нерухомій системі теж відомо. У такий спосіб з'являється можливість досліджувати рух веденої ланки, один кінець якої збігається з вершиною тригранника, у системі самого тригранника. Надалі знайдені кінематичні характеристики перераховуються в проекціях на осі нерухомої системи координат.

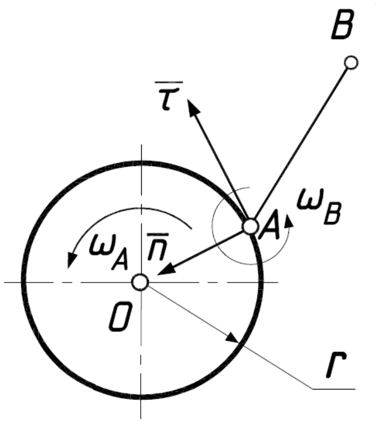
Аналіз останніх досліджень і публікацій. Велике значення має дослідження траєкторних кривих руху окремих складових механізмів або точок їх ланок. До задач цієї групи відноситься створення механізмів, які змогли б відтворювати наперед задані криві. Деякі праці із прикладної геометрії присвячені саме цій тематиці [1-3]. Відшуканню множини траєкторних кривих, утворених за допомогою планетарних механізмів, присвячена монографія [4]. Кінематику руху відрізка у площині за заданими умовами розглянуто в праці

[5]. Застосування тригранника Френе для визначення положень ланок плоского механізму показано у праці [6].

Формулювання цілі статті (постановка завдання). Метою статті є знаходження траєкторій і швидкостей точок веденої ланки плоского механізму з допомогою формул і тригранника Френе.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо фрагмент плоского механізму, який складається із двох ланок: кривошипа *OA* та прямолінійної ланки *AB*. Точка *A* рухається по колу радіусом *r* зі сталою швидкістю V_A, тобто кривошип обертається навколо точки *O* зі сталою кутовою швидкістю ω_A. Ланка *AB* і собі обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_B навколо рухомої точки *A* в одну або протилежну сторону (рис. 1, а). У такому випадку рух ланки *AB* можна описати за допомогою супровідного тригранника кола – траєкторії точки *A*.

При русі тригранника по колу його вершина збігатиметься із точкою *A*, орт $\bar{\tau}$ буде дотичним до кола, орт головної нормалі $\bar{n}$ буде спрямований до центра кола, а орт бінормалі проекціюватиметься в точку (рис. 1,а).



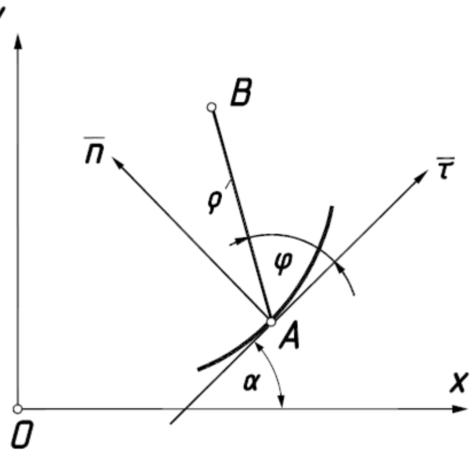


Рис. 1. Графічні ілюстрації до схеми роботи дволанкового плоского механізму:

а) схема руху ланки *AB*;

б) ланка *AB* у системі тригранника

Ланка *AB* здійснюватиме відносний рух у системі тригранника, обертаючись навколо його вершини зі сталою кутовою швидкістю ω_B. Положення точки *B* у системі тригранника опишеться параметричними рівняннями:

$$\rho_\tau = \rho\cos\varphi; \qquad \rho_n = \rho\sin\varphi, \tag{1}$$

де $\rho = AB - const$;

φ – кут повороту ланки *AB*, який відбувається за лінійним законом.

Для застосування формул Френе незалежною змінною, від якої залежить положення ланок, має бути довжина дуги кривої s, якою рухається тригранник (у нашому випадку по колу радіуса $r=1/k$, де k – його кривина). При лінійній залежності $\varphi = as$ кутові швидкості описуються виразами [6]:

$$\omega_A = V_A k; \qquad \omega_B = V_A \frac{d\varphi}{ds} = V_A a. \tag{2}$$

У загальному випадку параметричні рівняння траєкторії точки A мають вигляд [6]:

$$x_A = \int \cos(\int kds)ds; \quad y_A = \int \sin(\int kds)ds, \tag{3}$$

де $\alpha = \int kds$ – кут повороту ортів тригранника $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ відносно осей Ox і Oy відповідно (рис. 1, а).

Якщо відомі залежності (1) і натуральне рівняння напрямної кривої (траєкторії точки A) $k = k(s)$, тоді абсолютну траєкторію руху точки B знаходимо із параметричних рівнянь [6**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

$$\begin{aligned} x_B &= \rho\cos\left(\varphi + \int kds\right) + \int \cos\left(\int kds\right)ds; \\ y_B &= \rho\sin\left(\varphi + \int kds\right) + \int \sin\left(\int kds\right)ds. \end{aligned} \tag{4}$$

Для кола $k = 1/r$ рівняння (3) після інтегрування виразів набувають вигляду:

$$x_A = r\sin\frac{s}{r}; \quad y_A = -r\cos\frac{s}{r}. \tag{5}$$

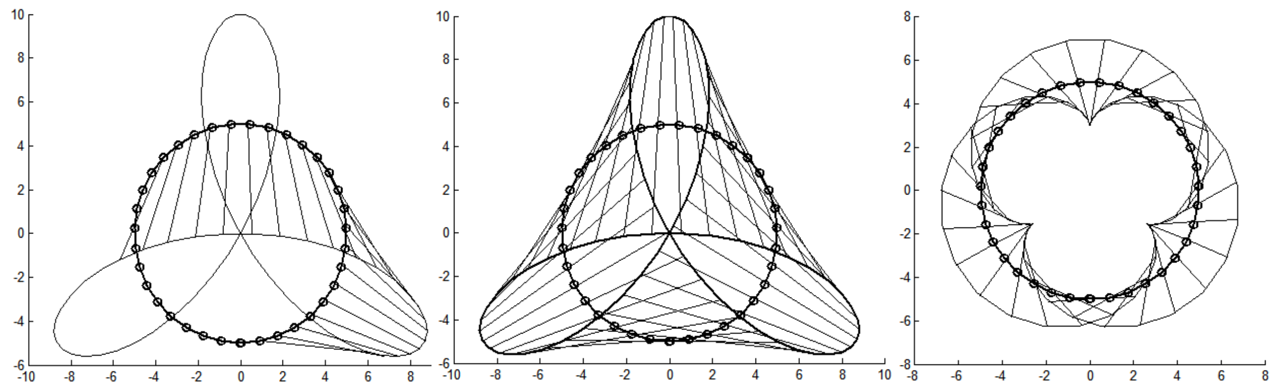
Відповідно рівняння абсолютної траєкторії точки B запишуться:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho\cos\left[\left(a + \frac{1}{r}\right)s\right] + r\sin\frac{s}{r}; \\ y_B &= \rho\sin\left[\left(a + \frac{1}{r}\right)s\right] - r\cos\frac{s}{r}. \end{aligned} \tag{6}$$

Таким чином, за виразами (5) визначаються координати точки A – одного кінця прямолінійної ланки AB, а за виразами (6) – координати точки B – протилежного її кінця.

За координатами двох точок можна побудувати множину положень прямолінійної ланки із заданою щільністю залежно від величини Δs.

Побудуємо множину положень ланки AB для заданого співвідношення кутових швидкостей $\omega_A/\omega_B = k/a$. При побудові було з’ясовано, що при різних співвідношеннях кутових швидкостей обертання ланок та їх довжин, можна отримати множини положень ланок із різними властивостями. Наприклад, за умов однакових довжин ланок і співвідношенні
$\omega_A/\omega_B = -2/3$ (тобто кутові швидкості обертання мають протилежний напрям) абсолютною траєкторією точки B є крива, яка називається трьохпелюстковою трояндою (рис. 2, а, в). При першому оберті точки A по колу множина положень ланки AB займає положення, яке зображено на рис. 2, а, а при другому оберті – таке, яке показано на рис. 2, б. Звідси можна констатувати висновок, що в тій самій точці кола кінець ланки (точка B) при першому повороті знаходиться по одну його сторону, а при другому – на протилежній стороні. Звідси випливає, що при продовженні ланки AB у протилежну сторону від точки A кінці подовженої ланки рухатимуться однією і тією ж траєкторією – по трьохпелюстковій троянді.



а б в

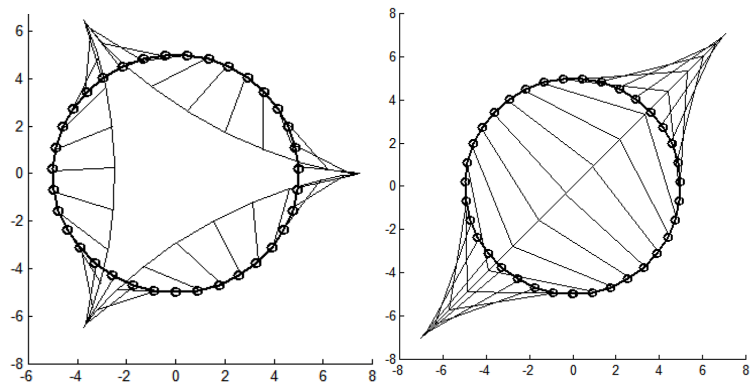
Рис. 2. Множина положень ланки AB при $k = 0{,}2$ ($r = 5$):

а) $\omega_A/\omega_B = -2/3$; $AB = \rho = 5$; один неповний оберт точки A;

б) $\omega_A/\omega_B = -2/3$; $AB = \rho = 5$; два повних оберти точки A;

в) $\omega_A/\omega_B = 2/3$; $AB = \rho = 2$; два повних оберти точки A.

Якщо взяти $\omega_A/\omega_B = -1/3$ при $\rho = 2{,}5$ і $r = 5$, то множина положень ланки AB розташується так, як показано на рис. 3, а, тобто при кожному новому оберті ланка займатиме ті ж самі положення, що і при попередньому. На рис. 3, б показано випадок, коли точка A ланки AB рухається по колу, а точка B – по прямій лінії.



а б

Рис. 3. Множина положень ланки AB при k = 0,2 (r = 5):

а) $\omega_A/\omega_B = -1/3$; $\rho = 2{,}5$;

б) $\omega_A/\omega_B = -1/2$; $\rho = 5$.

Отже, при однакових довжинах ланок OA і AB і протилежних кутових швидкостях їх обертання точка B рухається по прямій у тому випадку, коли швидкість обертання ланки AB є вдвічі меншою від швидкості обертання ланки OA.

Абсолютну швидкість точки B можна отримати диференціюванням параметричних рівнянь абсолютної траєкторії (6) за параметром часу t. Оскільки вона описана у функції довжини дуги s напрямного кола, то це потрібно враховувати при диференціюванні: $\frac{dx_A}{dt} = \frac{dx_A}{ds}\frac{ds}{dt} = V_A\frac{dx_A}{ds} = \frac{\omega_A}{k}\frac{dx_A}{ds}$. Аналогічно матимемо $\frac{dx_A}{dt} = \frac{\omega_A}{k}\frac{dy_A}{ds}$.

Після диференціювання рівнянь (6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dx_B}{ds} &= -\rho\left(a+\frac{1}{r}\right)\sin\left[\left(a+\frac{1}{r}\right)s\right]+\cos\frac{s}{r}; \\ \frac{dy_B}{ds} &= \rho\left(a+\frac{1}{r}\right)\cos\left[\left(a+\frac{1}{r}\right)s\right]+\sin\frac{s}{r}. \end{aligned} \tag{7}$$

Щоб отримати вектор абсолютної швидкості точки B потрібно вирази (7) помножити на сталу $V_A=\omega_A/k$. Модуль швидкості отримаємо множенням сталої $V_A=\omega_A/k$ на корінь квадратний складових (7):

$$V_B = \omega_A\sqrt{r^2+\rho^2(1+ar)^2-2r\rho(1+ar)\sin as}. \tag{8}$$

За формулою (8) можна знаходити величину швидкості будь-якої точки ланки AB. Для цього потрібно надати для ρ певного значення довжини, відлік якої починається від точки A. Наприклад, для $\rho=0$ із виразу (8) знаходимо: $V_B=\omega_A r$, що відповідає швидкості точки A, що і слід було чекати.

Висновки. Для аналітичного опису множини положень прямолінійної веденої ланки плоского механізму також доцільно застосовувати тригранник Френе, вершина якого збігається з одним із його кінців. Тригранник у такому випадку є супровідним для заданої траєкторії цього кінця. Якщо цей кінець ланки шарнірно з'єднаний із кривошипом, то напрямною кривою для тригранника є коло. Протилежний кінець описує відносну траєкторію відносно до тригранника, у якому ланка робить обертальний рух навколо вершини за певним законом. Розглянуто приклад, коли тригранник рухається по колу зі сталою швидкістю, а ланка в його системі обертається навколо вершини теж зі сталою кутовою швидкістю, причому вона може мати додатне (проти годинникової стрілки) і від'ємне (за годинниковою стрілкою) значення.

Список використаної літератури

1. Бергер Э.Г. Способ геометрического и механического образования рациональных кривых 3-г и 4-го порядка / Э.Г. Бергер, В.П. Табацков // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будівельник, 1982. –Вып. 33. – С. 88 - 89.

2. Потишко А.В. Воспроизведение некоторых спиралей / А.В. Потишко, В.С. Кобезская // Прикл. геометрия и инж. графика. –К.: Будівельник, 1971. –Вып. 13. – С. 84 - 85.

3. Зубащенко Г.П. Геометричні методи кінематичного аналізу плоских важільних механізмів вищих класів / Г.П. Зубащенко, О.Г. Корченко, Т.В. Попкова, М.Г. Макаренко, В.П. Щербина // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2007. –Вип. 77. –С. 80 – 84.

4. Росоха С.В. Геометричне моделювання об'ємів робочих камер роторно-планетарних трохоїдних машин / С.В. Росоха, Л.М. Куценко. – Х.: УЦЗУ, 2007. – 176 с.

5. Пилипака С.Ф. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині / С.Ф. Пилипака, В.М. Бабка, Т.С. Пилипака // Прикл. геометрія та інж. графіка. –К.: КНУБА, 2007. –Вип. 77. –С. 36 - 42.

6. Чепіжний А.В. Визначення положень ланок плоского механізму за допомогою системи тригранника Френе / А.В. Чепіжний, В.М. Бабка // Прикладна геометрія та інженерна графіка. –К.: КНУБА, 2012. –Вип. 90. – С. 20 – 26.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ, НА ПРИМЕРЕ ВЕДОМОГО ЗВЕНА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Пилипака С.Ф., Чепижный А.В.

Звенья плоского механизма связаны между собой, соответственно и их скорости в каждый момент времени тоже находятся в определенной зависимости. Если концы прямолинейного звена движутся по определенным траекториям и с определенными скоростями, то в каждый момент времени проекции скорости концов звена на самую звено равны. При аналитическом описании закона движения звена плоского механизма именно этот факт является определяющим для проверки правильности этого аналитического описания. Трехгранник и формулы Френе можно с успехом применить для нахождения скорости любой точки звена плоского механизма.

Ключевые слова: плоский механизм, кривошип, ведомое звено, подвижный трехгранник Френе, относительное движение точки, траектория, скорость.

DETERMINATION OF TRAJECTORIES AND SPEEDS OF POINTS IN COMPLEX MOVEMENT, ON THE EXAMPLE OF A SLAVE LINK OF A PLANE MECHANISM

Pilipaka S.F., Chepizhny A.V.

The links of the planar mechanism are interconnected, respectively, and their speeds at each moment of time are also in a certain dependence. If the ends of a straight link move along certain trajectories and with certain speeds, then at each instant of time, the projections of the speed of the ends of the link onto the link itself are equal. In an analytical description of the law of motion of a link of a planar mechanism, it is this fact that is decisive for verifying the correctness of this analytical description. The trihedron and the Frenet formulas can be successfully applied to find the speed of any point in the link of a plane mechanism.

Keywords: planar mechanism, crank, driven link, moving Frenet trihedron, relative point motion, trajectory, speed.