

УДК 631.312:514.18

КОНСТРУЮВАННЯ МЕРИДІАНА ДЛЯ ЗАДАНОГО РУХУ ЧАСТИНКИ ПО ПОВЕРХНІ, ЯКА ОБЕРТАЄТЬСЯ НАВКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОЇ ОСІ

Т. М. Воліна, С. Ф. Пилипака, В. М. Бабка, А. В. Несвідомін

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття зі спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторів: t.n.zaharova@ukr.net.

*Історія статті: отримано – квітень 2021, акцептовано – серпень 2021, опубліковано – 30 вересня 2021 року.
Бібл. 5, рис. 2, табл. 0.*

Анотація. У статті розглянуто конструювання поверхні обертання, яке зводиться до знаходження її меридіана за заданими умовами. Такими умовами є характер руху частинки по внутрішній поверхні при її обертанні навколо вертикальної осі. Абсолютний рух частинки утворюється від співвідношення обертального руху поверхні і відносного руху (ковзання) частинки по поверхні. Класичними прикладами такого руху є рух частинки всередині вертикального конуса, який обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо своєї осі, а також частковий випадок, коли кут нахилу твірних конуса дорівнює нулю і він перетворюється на горизонтальний диск. Криву меридіана можна задати явним рівнянням або ж параметричними рівняннями у функції незалежної змінної. У статті розглянуто випадок, коли меридіан поверхні обертання задається параметричними рівняннями у функції часу. Це дозволяє скласти диференціальне рівняння руху частинки, в якому всі залежності є функціями часу. Ці залежності потрібно розшукати зі складеного диференціального рівняння руху частинки.

Коли частинка попадає на поверхню, вона починає по ній ковзати, описуючи криволінійну траєкторію. Із урахуванням обертального руху поверхні знаходиться абсолютна траєкторія. Перша похідна її довжини по часу дає абсолютну швидкість, а друга – абсолютне прискорення, у вираз якого закладені невідомі функції, що описують меридіан. Диференціальне рівняння руху складено в проекціях на три осі декартової системи координат. У систему із трьох рівнянь входять чотири невідомі функції: два рівняння, що задають меридіан, залежність кутової швидкості ковзання частинки і реакція поверхні. Щоб розв'язати рівняння, кількість невідомих функцій потрібно скоротити до трьох. Для цього одну залежність задаємо. Такий підхід призводить до отримання часткових випадків, один із яких – рух частинки по горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі. Розглянуто конкретний приклад і побудовано криву меридіана в результаті чисельного розв'язання рівнянь за умови, що частинка всередині поверхні піднімається вгору із сталою заданою швидкістю.

Ключові слова: поверхня обертання, меридіан, кутова швидкість, частинка, ковзання, траєкторія, диференціальні рівняння.

Постановка проблеми

Ковзання технологічного матеріалу по рухомих поверхнях має місце в різного роду апаратах і пристроях. Окремим випадком такого руху є обертальний, а рухомою поверхнею є поверхня обертання. Достатньо добре вивчено рух частинок всередині вертикального конуса, що обертається навколо вертикальної осі, а також рух частинок на горизонтальному диску, який можна розглядати, як частковий випадок конуса. Характер руху частинки по поверхні залежить від форми меридіана. Наприклад, при достатній кутовій швидкості обертання конуса вона піднімається по його поверхні необмежено. Для інших поверхонь вона може “залипнути” на певній висоті. У статті розглядається можливість впливу на характер руху частинки по поверхні формою її меридіана.

Аналіз останніх досліджень

Багато наукових статей присвячено руху матеріальної частинки по поверхні. Технологічний матеріал складається з сукупності окремих частинок, а тому його рух є складнішим у порівнянні з рухом окремої частинки [1], бо у такому випадку виникають сили інерції від обертання, які мають бути враховані. Таким чином, рух технологічного матеріалу не може бути замінено рухом окремої частинки. Проте, залежності руху окремої частинки можуть бути певною мірою перенесені на матеріал або ж дозволяють виявити напрям подальших досліджень.

Слід відзначити, що дослідження руху частинки по поверхні у поєднанні з іншими дослідженнями є передумовою для моделювання розподілу рідин під час процесу інерційного фільтрування [2], взаємодії між деформованими елементами та потоком газ-рідина [3], інерційного розділення газодисперсійних потоків у криволінійних каналах компресорного об-

ладнання [4] і навіть для технологічного забезпечення виготовлення складних деталей у машинобудуванні [5].

Виходячи з вищесказаного, для дослідження закономірностей руху матеріальної частинки по поверхні з заданими конструктивними параметрами, необхідно мати аналітичні залежності, які описують цей рух.

Мета досліджень

Розробити аналітичний опис меридіана поверхні, що обертається навколо вертикальної осі, за деякими вимогами до характеру руху частинки по ній.

Результати досліджень

Параметричні рівняння поверхні обертання мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \alpha; \\ Y &= \rho \sin \alpha; \\ Z &= z, \end{aligned} \quad (1)$$

де ρ – відстань від осі обертання до точки на меридіані (рис. 1);

z – висота від початку координат до точки на меридіані (рис. 1);

α – кут, що задає положення точки на поверхні обертання.

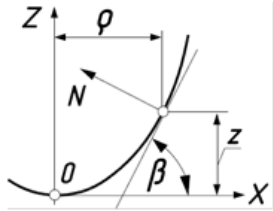


Рис. 1. Меридіан поверхні обертання з нормаллю до нього в точці розташування частинки.

Fig. 1. The meridian of the surface of rotation with the normal to it at the point of the location of the particle.

Змінні ρ і z задають форму меридіана, тобто перебувають між собою у певній залежності: у явній $z=z(\rho)$ або у вигляді параметричних рівнянь $z=z(t)$ і $\rho=\rho(t)$, де t – певна незалежна змінна. Для нашого випадку за таку змінну доцільно взяти час, оскільки для складання руху частинки потрібно мати вирази її швидкості і прискорення, які є функціями часу. Після цього рівняння поверхні (1) залежатиме від двох змінних: часу t і кута α .

Залежностями $z=z(t)$ і $\rho=\rho(t)$ задається крива меридіана. Якщо і кут α зробити залежним від часу t , тобто $\alpha=\alpha(t)$, то всі три рівняння (1) будуть функціями однієї змінної – часу t , тобто на поверхні (1) буде описана просторова крива, яку ми вважатимемо траєкторією ковзання частинки. У такому випадку параметричні рівняння поверхні і кривої на ній будуть ідентичними. Щоб їх відрізнити, для поверхонь приймемо позначення рівнянь прописними літерами, а для ліній – строчними.

Обертання поверхні (1) будемо розглядати по відношенню до двох систем координат: нерухомої $OXYZ$ і рухомої $Oxyz$, яка буде обертатися разом із поверхнею. Якщо ми хочемо, щоб частинка в обертальному русі ковзала по поверхні в додатному напрямку (проти годинникової стрілки), то саму поверхню будемо обертати із кутовою швидкістю ω в протилежному напрямку (за годинниковою стрілкою). За час t вона повернеться на кут $\theta=-\omega \cdot t$. Застосуємо відомі формули повороту однієї системи координат відносно іншої:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos \alpha \cos \theta - \rho \sin \alpha \sin \theta; \\ Y &= \rho \cos \alpha \sin \theta + \rho \sin \alpha \cos \theta; \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (2)$$

Після спрощень із урахуванням $\theta=-\omega \cdot t$ рівняння (2) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos(\omega t - \alpha); \\ Y &= -\rho \sin(\omega t - \alpha); \\ Z &= z. \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо α у рівняннях (3) є незалежною змінною, то вони описують поверхню, якщо ж $\alpha=\alpha(t)$, то це будуть рівняння абсолютної траєкторії руху частинки і в такому випадку літери “X”, “Y”, “Z” потрібно замінити на строчні.

Рівняння руху частинки будемо складати у вигляді $m\bar{w}=\bar{F}$, де \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Усі вектори будемо визначати в проєкціях на осі нерухомої системи координат. Векторами прикладених до частинки сил є: сила ваги mg (m – маса частинки, $g=9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння), реакція поверхні R , та сила тертя $f \cdot N$ (f – коефіцієнт тертя). Вектор ваги mg частинки спрямований вниз паралельно осі OZ , отже напрямний одиничний вектор запишеться:

$$mg : \{0; \quad 0; \quad -1\}. \quad (4)$$

Вектор сили тертя спрямований по дотичній до траєкторії ковзання, тобто до траєкторії відносного руху в сторону, протилежну швидкості відносного руху. Проекції швидкості відносного руху знайдемо диференціюванням рівнянь (1) за умови, що вони всі є функціями часу t :

$$\begin{aligned} x'_r &= \rho' \cos \alpha - \alpha' \rho \sin \alpha; \\ y'_r &= \rho' \sin \alpha + \alpha' \rho \cos \alpha; \\ z'_r &= z'. \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки в нас буде ще і абсолютна швидкість, то для того, щоб їх розрізнити, ми ввели індекс “r” – для відносної і “a” – для абсолютної швидкостей.

Геометрична сума складових (4) дасть величину швидкості ковзання частинки по сферичному диску у відносному русі:

$$V_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2} = \sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}. \quad (6)$$

Одиничний вектор дотичної до траєкторії відносного руху в проєкціях на осі системи $OXYZ$ одержимо діленням проєкцій (5) на величину вектора (6). Враховуючи те, що сила тертя $f \cdot N$ спрямована в протилежну сторону вектору відносної швидкості, запишемо одиничний напрямний вектор дії сили тертя із протилежним знаком:

$$f \cdot N : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\rho' \cos \alpha - \alpha' \rho \sin \alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}; \\ -\frac{\rho' \sin \alpha + \alpha' \rho \cos \alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}; \\ -\frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}} \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Сила реакції поверхні R спрямована вздовж нормалі N до поверхні. Цей вектор розташований в площині меридіана (рис.1) і перпендикулярний до дотичної в поточній точці. Потрібно прослідкувати, щоб його напрям збігався із напрямом дії реакції R поверхні, тобто його горизонтальна проекція повинна бути спрямована в сторону осі обертання (рис. 1). Проекції одиничного вектора меридіана в площині ZOX (рис. 1) запишуться:

$$N : \left\{ -\frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \right\}. \quad (8)$$

Враховуючи кут повороту площини меридіана навколо осі OZ , одиничний вектор (8) запишемо в проекціях на осі просторової системи координат $OXYZ$. Він і буде напрямним вектором дії сили реакції поверхні на частинку:

$$R : \left\{ -\frac{z' \cos \alpha}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; -\frac{z' \sin \alpha}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \right\}. \quad (9)$$

Знайдемо вектор \bar{w} абсолютного прискорення в проекціях на осі системи координат $OXYZ$. Для цього потрібно двічі продиференціювати рівняння (3) абсолютного руху частинки. Перше диференціювання рівнянь (3) дає проекції абсолютної швидкості руху частинки:

$$\begin{aligned} x'_a &= \rho' \cos(\omega t - \alpha) - \rho(\omega - \alpha') \sin(\omega t - \alpha); \\ y'_a &= -\rho' \sin(\omega t - \alpha) - \rho(\omega - \alpha') \cos(\omega t - \alpha); \\ z'_a &= z'. \end{aligned} \quad (10)$$

Диференціюванням виразів (9) знаходимо проекції вектора абсолютного прискорення на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} x''_a &= (\alpha'' \rho - 2\rho'(\omega - \alpha')) \sin(\omega t - \alpha) + \\ &+ (\rho'' - \rho(\omega - \alpha')^2) \cos(\omega t - \alpha); \\ y''_a &= (\alpha'' \rho - 2\rho'(\omega - \alpha')) \cos(\omega t - \alpha) - \\ &- (\rho'' - \rho(\omega - \alpha')^2) \sin(\omega t - \alpha); \\ z''_a &= z''. \end{aligned} \quad (11)$$

Одиничні напрямні вектори дії сили тертя $f \cdot N$ (7), і реакції R поверхні (9) знайдені для нерухомої поверхні. Оскільки поверхня повертається на кут $\theta = -\omega t$, то вказані вектори теж потрібно повернути на цей кут, щоб вони відповідали розташуванню частинки. Поворот здійснюємо аналогічно, як і поворот поверхні згідно формул (2). Після повороту проекції вказаних векторів запишуться:

- одиничного напрямного вектора дії сили тертя $f \cdot N$:

$$f \cdot N : \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\rho' \cos(\omega t - \alpha) + \alpha' \rho \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}; \\ \frac{\rho' \sin(\omega t - \alpha) - \alpha' \rho \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}; \\ -\frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}} \end{array} \right\}. \quad (12)$$

- одиничного напрямного вектора дії сили реакції R :

$$R : \left\{ -\frac{z' \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \frac{z' \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \right\}. \quad (13)$$

Векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ в проекціях на осі нерухомої системи координат $OXYZ$ запишеться із урахуванням одиничного вектора (4) напрямку дії сили ваги mg , одиничного вектора (12) напрямку дії сили тертя $f \cdot N$ і одиничного вектора (13) напрямку дії сили реакції R наступним чином:

$$\begin{aligned} mx''_a &= -N \frac{z' \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} - \\ &- fN \frac{\rho' \cos(\omega t - \alpha) + \alpha' \rho \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}; \\ my''_a &= N \frac{z' \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} + \\ &+ fN \frac{\rho' \sin(\omega t - \alpha) - \alpha' \rho \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}; \\ mz''_a &= -mg + N \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} - \\ &- fN \frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + z'^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставимо у (14) вирази абсолютного прискорення (11) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із чотирма невідомими залежностями: $\alpha = \alpha(t)$, $\rho = \rho(t)$, $z = z(t)$ і $R = R(t)$. Щоб її розв'язати, одну залежність потрібно задати. Поставимо умову, щоб швидкість підйому частинки вгору в напрямі осі OZ була сталою і рівною V_z . Тоді $z' = V_z$, $z'' = 0$. Підставимо ці значення у (14) і розв'яжемо систему відносно α'' , ρ'' і R :

$$\begin{aligned} \alpha'' &= 2 \frac{\rho'}{\rho} (\omega - \alpha') - \frac{Afg\alpha'}{\rho'V_r - fAV_z}; \\ \rho'' &= \rho(\omega - \alpha')^2 - g \frac{V_rV_z + Af\rho'}{\rho'V_r - fAV_z}; \\ R &= \frac{mAgV_r}{\rho'V_r - fAV_z}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $V_r = \sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2 \rho^2 + V_z^2}$, $A = \sqrt{\rho'^2 + V_z^2}$.

Система (15) фактично є системою двох перших рівнянь відносно невідомих залежностей $\alpha = \alpha(t)$ і $\rho = \rho(t)$, а залежність $R = R(t)$ знаходиться після розв'язання цієї системи. Отриману систему потрібно розв'язувати чисельними методами. Оскільки $z' = V_z$, то $z = V_z t$. Ця залежність разом із знайденою залежніс-

тю $\rho=\rho(t)$ описує меридіан поверхні обертання. На рис. 2 чисельними методами було побудовано меридіан для двох значень V_z .

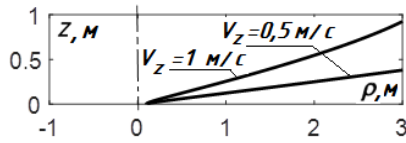


Рис. 2. Меридіани поверхні обертання при $\omega=20 \text{ с}^{-1}$, $f=0,3$, $\rho_0=0,1 \text{ м}$ і різних швидкостях V_z .

Fig. 2. The meridians of the surface of rotation at $\omega=20 \text{ s}^{-1}$, $f=0,3$, $\rho_0=0,1 \text{ m}$ and different speeds V_z .

Меридіан починається не з початку координат, оскільки було задане початкове значення $\rho_0=0,1 \text{ м}$. Отримана поверхня обертання близька до конічної, причому по мірі зменшення швидкості V_z меридіан наближається до прямої лінії, а сама поверхня – до площини. Це і зрозуміло, адже при $V_z=0$ конус перетворюється на площину і частинка ковзає по горизонтальному диску. При будь-якій кутовій швидкості ω його обертання підйому частинки не буде, тобто $V_z=0$. Якщо у рівняння (15) підставити $V_z=0$, то ми отримуємо наступний результат:

$$\alpha'' = 2 \frac{\rho'}{\rho} (\omega - \alpha') - fg \frac{\alpha'}{\sqrt{\rho^2 \alpha'^2 + \rho'^2}};$$

$$\rho'' = \rho (\omega - \alpha')^2 - fg \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 \alpha'^2 + \rho'^2}};$$

$$R = mg.$$

Рівняння (16) точно збігаються із диференціальними рівняннями руху частинки по горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі, і які наведені в монографії [1] на стор. 246 (формули (44) і (45)).

Розглянемо ще один частковий випадок. Нехай $\alpha''=0$, $\alpha'=\omega$. Це означає, що частинка при ковзанні по поверхні обертається навколо її осі зі сталою кутовою швидкістю, рівною кутовій швидкості обертання поверхні. Кутові швидкості спрямовані в протилежні сторони, отже в абсолютному русі обертання частинки відсутнє. Підставимо ці умови в (11) і (14) і після розв'язування отримуємо: $\rho''=0$, тобто $\rho=\rho_0=const$, $z''=-g$, $R=0$. Це означає, що поверхнею обертання є вертикальний циліндр. Прискорення частинки стало і дорівнює $-g$, отже вона перебуває у стані вільного падіння вниз. Реакція $R=0$, тому кутова швидкість ω обертання циліндра не впливає на падіння частинки.

Висновки

1. Аналітичний опис складного руху частинки по поверхні, яка обертається навколо вертикальної осі, зводиться до знаходження траєкторії її ковзання.

2. У статті показана спроба розв'язання оберненої задачі: знайти таку форму меридіана, щоб поверхня обертання потрібним чином впливала на характер ковзання частинки. Із виведених диференціальних рівнянь руху частинки отримано часткові відомі результати.

Список літератури

1. Pylypaka S., Klendi, M., Zaharova T. Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing*. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, P. 336-345. doi: 10.1007/978-3-319-93587-4_35.

2. Sklabinskyi V., Liaposhchenko O., Pavlenko I., Lytvynenko O., Demianenko M. Modelling of liquid's distribution and migration in the fibrous filter layer in the process of inertial-filtering separation. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing*. DSMIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2019. P. 489-497, doi: 10.1007/978-3-319-93587-4_51.

3. Liaposhchenko O., Pavlenko I., Monkova K., Demianenko M., Starynskyi O. Numerical simulation of aeroelastic interaction between gas-liquid flow and deformable elements in modular separation devices. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing II*. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2020. P. 765-774, doi: 10.1007/978-3-030-22365-6_76.

4. Liaposhchenko O. O., Sklabinskyi V. I., Zavalov V. L., Pavlenko I. V., Nastenko O. V., Demianenko M. M. Appliance of inertial gas-dynamic separation of gas-dispersion flows in the curvilinear convergent-divergent channels for compressor equipment reliability improvement. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 233(1). 012025. doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012025.

5. Karpus V., Ivanov V., Dehtiarov I., Zajac J., Kurochkina V. Technological assurance of complex parts manufacturing. In: Ivanov V. et al. (eds.) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing*, DSMIE-2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2019. P. 51-61, doi: 10.1007/978-3-319-93587-4_6.

References

1. Pylypaka S., Klendi, M., Zaharova T. (2019). Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing*. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 336-345.

2. Sklabinskyi V., Liaposhchenko O., Pavlenko I., Lytvynenko O., Demianenko M. (2019). Modelling of liquid's distribution and migration in the fibrous filter layer in the process of inertial-filtering separation. In: Ivanov V. et al. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing*. DSMIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 489-497.

3. Liaposhchenko O., Pavlenko I., Monkova K., Demianenko M., Starynskyi O. (2020). Numerical simulation of aeroelastic interaction between gas-liquid flow and deformable elements in modular separation devices. In: Ivanov V. et al. (eds). *Advances in Design, Simulation*

and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer. Cham. 765-774.

4. *Liaposhchenko O. O., Sklabinskyi V. I., Zavalov V. L., Pavlenko I. V., Nastenko O. V., Demianenko M.M.* (2017). Appliance of inertial gas-dynamic separation of gas-dispersion flows in the curvilinear convergent-divergent channels for compressor equipment reliability improvement. In: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 233(1). 012025.

5. *Karpus V., Ivanov V., Dehtiarov I., Zajac J., Kurochkina V.* (2019). Technological assurance of complex parts manufacturing. In: Ivanov V. et al. (eds.) Advances in Design, Simulation and Manufacturing, DSMIE-2018, Lecture Notes in Mechanical Engineering. 51-61.

КОНСТРУИРОВАНИЕ МЕРИДИАНА
ДЛЯ ЗАДАНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЧКИ
ПО ПОВЕРХНОСТИ, КОТОРАЯ ВРАЩАЕТСЯ
ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

*Т. Н. Волина, С. Ф. Пилупака, В. Н. Бабка,
А. В. Несвидомин*

Аннотация. В статье рассмотрено конструирование поверхности вращения, которое сводится к нахождению ее меридиана по заданным условиям. Таковыми условиями являются характер движения частички по внутренней поверхности при ее вращении вокруг вертикальной оси. Абсолютное движение частички образуется от соотношения вращательного движения поверхности и относительного движения (скольжения) частички по поверхности. Классическими примерами такого движения является движение частички внутри вертикального конуса, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, а также частный случай, когда угол наклона образующих конуса равен нулю и он превращается в горизонтальный диск. Кривую меридиана можно задать явным уравнением или параметрическими уравнениями в функции независимой переменной. В статье рассмотрен случай, когда меридиан поверхности вращения задается параметрическими уравнениями в функции времени. Это позволяет составить дифференциальное уравнение движения частички, в котором все зависимости являются функциями времени. Эти зависимости должны быть найдены из составленного дифференциального уравнения движения частички.

Когда частичка попадает на поверхность, она начинает по ней скользить, описывая криволинейную траекторию. С учетом вращательного движения поверхности находится абсолютная траектория. Первая производная ее длины по времени дает абсолютную скорость, а вторая – абсолютное ускорение, в выражение которого заложены неизвестные функции, описывающие меридиан. Дифференциальное уравнение движения составлено в проекциях на три оси декартовой системы координат. В систему из трех уравнений входят четыре неизвестные функции: два уравнения, задающие меридиан, зависимость угловой скорости скольжения частички и реакция поверхности. Чтобы решить уравнение, количество неизвест-

ных функций нужно сократить до трех. Для этого одну зависимость задаем. Такой подход приводит к получению частных случаев, один из которых – движение частички по горизонтальному диску, вращающемуся вокруг вертикальной оси. Рассмотрен конкретный пример и построено кривую меридиана в результате численного решения уравнений при условии, что частичка внутри поверхности поднимается вверх с постоянной заданной скоростью.

Ключевые слова: поверхность вращения, меридиан, угловая скорость, частичка, скольжение, траектория, дифференциальные уравнения.

CONSTRUCTION OF MERIDIAN FOR GIVEN
MOVEMENT OF PARTICLE ON SURFACE WHICH
ROTATES AROUND THE VERTICAL AXIS

*T. M. Volina, S. F. Pylypaka, V. M. Babka,
A. V. Nesvidomin*

Abstract. The article considers the construction of the surface of rotation, which is came down to finding its meridian by given condition. Such condition is the nature of the movement of the particle on the inner surface during its rotation around the vertical axis. The absolute movement of a particle is formed from the ratio of the rotational movement of the surface and the relative movement (sliding) of the particle on the surface. Classic example of such movement is the particle movement inside a vertical cone that rotates at a constant angular velocity around its axis, and the partial case when the angle of inclination of the generatrices of the cone is equal to zero and it turns into a horizontal disk. The meridian curve can be set by explicit equations or parametrical equations as a function of an independent variable. The article considers the case when the meridian of the surface of rotation is given by parametrical equations in the function of time. It allows us to make a differential equation of movement of a particle, in which all dependencies are functions of time. These dependences must be found from the composite differential equation of particle movement.

When a particle hits the surface, it begins to slide on it, describing a curvilinear trajectory. Taking into account the rotational movement of the surface, there is an absolute trajectory. The first derivative of its length in time gives an absolute velocity, and the second – absolute acceleration, the expression of which includes unknown functions describing the meridian. The differential equation of movement is compiled in projections on three axes of the Cartesian coordinate system. The system of three equations includes four unknown functions: two equations that define the meridian, the dependence of the angular velocity of the particle and the reaction of the surface. To solve the equation, the number of unknown functions should be reduced to three. One dependence was set for this. This method leads to partial cases, one of which is the movement of a particle on a horizontal disk rotating around a vertical axis. A specific example is considered and the meridian curve is constructed as a result of numerical solution of the equations, provided that the particle rises upwards inside the surface at a constant given velocity.

Key words: surface of rotation, meridian, angular velocity, particle, sliding, trajectory, differential equations.

Т. М. Воліна ORCID 0000-0001-8610-2208.

С. Ф. Пилипака ORCID 0000-0002-1496-4615.

В. М. Бабка ORCID 0000-0003-4971-4285.

А. В. Несвідомін ORCID 0000-0002-9227-4652.