

МИНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



ВИЩА МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ТА
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ПО ТЕМІ «КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ»**

СУМИ – 2011

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ТА
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ПО ТЕМІ «КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ»**

для студентів інженерних спеціальностей денної та заочної форм
навчання

СУМИ - 2011

УДК 517.37

Укладачі: Розуменко А. М., доцент кафедри вищої математики;
Головченко Г.С., асистент кафедри вищої математики.

М_Вища математика. Методичні вказівки щодо виконання контрольної роботи та самостійної роботи студентів по темі «Криволінійні та поверхневі інтеграли» для студентів інженерних спеціальностей денної та заочної форм навчання. – Суми: СНАУ, 2011.- 48 с.

Наведено методичні вказівки щодо виконання контрольної роботи та самостійної роботи студентів. Приводяться короткі теоретичні відомості по темах: «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Поверхні II порядку». Наведено контрольні завдання для самостійного виконання та зразки розв'язування завдань.

Рецензенти: доцент кафедри «Вища математика», кандидат фізико – математичних наук Коваленко Г. П. (Сумський національний аграрний університет); доктор технічних наук, професор Кочмола М. М. (Сумський національний аграрний університет).

Відповідальний за випуск: доцент кафедри «Вища математика», кандидат фізико – математичних наук Розуменко А. М.

Рекомендовано до друку вченою радою ННІТІ (протокол №_____ від «____» _____ 2011 року).

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

ТЕМА 1. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.....	5
1.1. Криволінійні інтеграли I роду (по довжині дуги).....	5
1.2. Криволінійні інтеграли II роду (по координатах).....	8
1.3. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду.....	10
1.4. Зв'язок між подвійним інтегралом по області D і криволінійним інтегралом по межі L цієї області (формула Гріна).....	10
1.5. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.....	10
ТЕМА 2. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.....	11
2.1. Поверхневі інтеграли I роду.....	11
2.2. Поняття поля. Скалярні та векторні поля. Фізичний зміст поверхневого інтеграла II роду.....	13
ТЕМА 3. Поверхні II порядку.....	17
3.1. Циліндричні поверхні.....	17
3.2. Конічні поверхні.....	18
3.3. Поверхні обертання.....	18
3.4. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку.....	19
ЗАГАЛЬНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО ВИКОНАННЯ	
КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	21
ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	22
ЗАВДАННЯ 1.....	23
ЗАВДАННЯ 2	25
ЗАВДАННЯ 3	27
ЗАВДАННЯ 4	27
ЗАВДАННЯ 5	29
ЗАВДАННЯ 6	30
ЗАВДАННЯ 7	32
ЗАВДАННЯ 8	34
ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ.....	36
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	44

ПЕРЕДМОВА

Економічні і соціальні зміни, які відбулися в Україні, зумовлюють суттєві зміни у розвитку науки, культури та освіти. Сьогодні в нашій країні впроваджується нова концепція вищої освіти, яка є орієнтованою на інтереси студента, на розвиток його особистості, поєднання професійної спроможності фахівця, з його знаннями та вміннями з фундаментальних дисциплін.

Стратегічні напрями аграрної політики полягають у глибокому реформуванні агропромислового комплексу на принципах використання інноваційних технологій виробництва. Нарощування обсягів нової аграрної продукції, що відповідає світовим стандартам, неможливе без підготовки висококваліфікованих кадрів інженерно – технологічних спеціальностей. У зв'язку з цим ефективна діяльність фахівця в сучасному технологічному просторі вимагає підвищення рівня математичної підготовки, яка сприяє розвитку абстрактного і логічного мислення та формуванню практичних навичок студентів, а також надає можливість використовувати математичні методи та моделі для вирішення прикладних задач.

У запропонованих методичних вказівках систематизовано основні відомості з теми «Криволінійні та поверхневі інтеграли» та розглянуто застосування криволінійних та поверхневих інтегралів для розв'язування задач з геометрії та механіки.

Методичні вказівки містять огляд основних теоретичних відомостей з тем: «Криволінійні інтеграли», «Поверхневі інтеграли», «Застосування криволінійних та поверхневих інтегралів до задач геометрії та механіки», «Поверхні другого порядку».

В методичних вказівках запропоновано 30 варіантів контрольної роботи по темі «Криволінійні та поверхневі інтеграли», кожний з яких містить 8 задач, та вимоги до оформлення контрольної роботи.

Тема 1. Криволінійні інтеграли.

1.1. Криволінійний інтеграл по довжині дуги (I роду).

1.1.1. Задача про обчислення маси плоскої кривої. Поняття криволінійного інтегралу по довжині дуги (I роду).

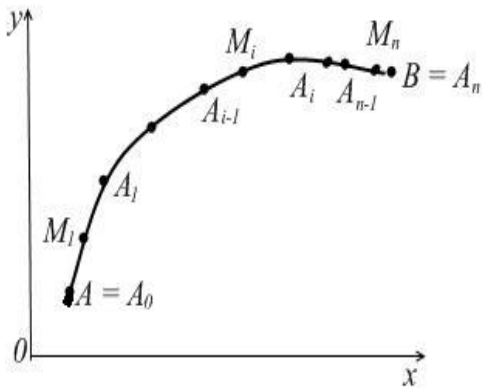


Рис. 1.1

Потрібно обчислити масу кривої AB .

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ і знайдемо значення функції в цій точці $f(\xi_i; \eta_i)$. Будемо вважати, що довжина кожної дуги $A_{i-1}A_i$ настільки мала, що її густина є сталою величиною і дорівнює значенню $f(\xi_i; \eta_i)$.

Маса елементарної дуги $\Delta m_i = f(\xi_i; \eta_i)\Delta l_i$, де Δl_i - довжина дуги $A_{i-1}A_i$. Складемо маси всіх елементарних дуг:

$$\sum_{i=1}^n \Delta m_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i)\Delta l_i. \quad (1.1)$$

Одержана сума (1.1) називається інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по кривій AB , а границя цієї суми при необмеженому зростанні точок поділу ($n \rightarrow \infty$) називається криволінійним інтегралом першого роду (по довжині дуги) від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначають $\int_{AB} f(x, y)dl$, тобто

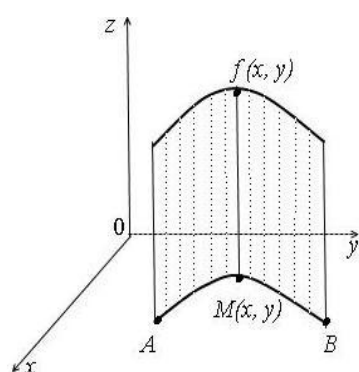
$$\int_{AB} f(x, y)dl = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i)\Delta l_i. \quad (1.2)$$

З іншого боку, ця границя наближається до значення маси дуги кривої. Якщо границя (1.2) існує, то функція $f(x, y)$ називається інтегрованою на кривій AB , сама крива AB – контуром інтегрування, A – початковою, а B – кінцевою точками інтегрування.

Фізичний зміст криволінійного інтеграла першого роду:

Якщо $f(x, y) > 0$, то криволінійний інтеграл I роду $\int_{AB} f(x, y)dl$ визначає масу неперервної кривої AB , яка має змінну лінійну густину $\gamma = f(x, y)$.

Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду:



Якщо $f(x, y) \geq 0$, то криволінійний інтеграл I роду $\int_{AB} f(x, y) dl$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x, y)$ і паралельні осі Oz , а напрямна збігається з кривою AB на площині Oxy (рис.1.2)

Рис. 1.2

Зокрема, якщо AB – не крива, а відрізок $[a; b]$, ($a < b$), що лежить на осі Ox , то $f(x, y) = f(x, 0) = f(x)$, $\Delta l_i = \Delta x_i$, циліндрична поверхня «вирівнюється» і стає криволінійною трапецією, тобто криволінійний інтеграл першого роду стає звичайним визначеним інтегралом і формула (1. 2) перетворюється в наступну формулу:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Якщо покласти $f(x, y) \equiv 1$, то площа циліндричної поверхні чисельно дорівнюватиме довжині дуги AB , тобто

$$L = \int_{AB} dl.$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду:

1°. Криволінійний інтеграл I роду не залежить від шляху інтегрування:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

$$2^\circ. \int_{AB} [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] dl = \int_{AB} f_1(x, y) dl \pm \int_{AB} f_2(x, y) dl.$$

$$3^\circ. \int_{AB} c f(x, y) dl = c \int_{AB} f(x, y) dl, \text{ де } c = \text{const.}$$

4°. Якщо контур інтегрування AB розбито на дві частини K_1 і K_2 , то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{K_1} f(x, y) dl + \int_{K_2} f(x, y) dl.$$

1.1.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду.

- Криволінійний інтеграл I роду у випадку, якщо крива задана рівнянням $y = \varphi(x)$, ($\alpha \leq x \leq \beta$), обчислюється за формулою

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx, \text{ або} \quad (1.3)$$

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x, \varphi(x))}{|\cos \alpha|} dx, \quad (1.4)$$

де α – кут між дотичної до кривої $y = \varphi(x)$ і віссю Ox ($\operatorname{tg} \alpha = \varphi'(x)$, $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2}}$).

- Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \quad \text{або} \quad (1.5)$$

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad (1.6)$$

(у випадку функції трьох змінних по просторовій кривій).

- Якщо рівняння плоскої кривої $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярних координатах ρ , φ , функція $\rho(\varphi)$ і її похідна $\rho' = \frac{d\rho}{d\varphi}$ неперервні, маємо частинний випадок формули (1.5), де за параметр t приймають кут φ :

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi, \quad (1.5.1.)$$

де φ_A і φ_B – значення φ , які визначають на кривій точки A та B .

1.1.3. Застосування криволінійних інтегралів першого роду.

Застосування в геометрії. Нехай у площині Oxy задано кусково – гладку криву AB замкнену чи незамкнену і на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x, y)$, тоді

1°. Площу P циліндричної поверхні, визначеної функцією $z = f(x, y)$ знаходять за формулою:

$$P = \int_{AB} f(x, y) dl. \quad (1.7)$$

2°. Довжину L кривої AB визначають за формулою:

$$L = \int_{AB} dl. \quad (1.8)$$

Застосування в механіці. Нехай вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, тоді

1°. Масу кривої L обчислюють за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl. \quad (1.9)$$

2°. Координати x_c , y_c центра маси кривої L знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{\int_L x \gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y \gamma(x, y) dl}{\int_L \gamma(x, y) dl} = \frac{M_x}{m}, \quad (1.10)$$

де M_x, M_y – статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy .

3°. Моменти інерції I_x, I_y, I_o кривої L відносно осей Ox і Oy і початку координат знаходять за формулами:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_o = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \quad (1.11)$$

1.2. Криволінійний інтеграл по координатах (II роду).

1.2.1. Поняття криволінійного інтеграла другого роду.

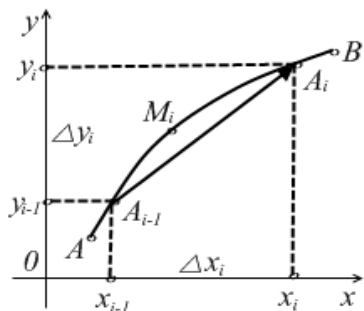


Рис. 1.3

Нехай на площині Oxy задано гладку чи кусково – гладку криву AB (рис. 1.3) і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо криву напрямною лінією, у якій точки A і B є відповідно початковою та кінцевою точками.

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин, на кожній окремій дузі $\Delta l_i = A_{i-1}A_i$ виберемо яку – небудь точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i) \Delta x_i, \quad (1.12)$$

де Δx_i – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox .

Якщо при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i \rightarrow 0$ інтегральні суми (1.12) мають скінченну

границю, яка не залежить ні від розбиття кривої AB , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають *криволінійним інтегралом від функції $P(x, y)$ по*

координаті x вздовж кривої AB і позначають $\int_{AB} P(x, y) dx$, тобто

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i) \Delta x_i. \quad (1.13)$$

Аналогічно, *криволінійний інтеграл від функції $Q(x, y)$ по координаті y :*

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i; \eta_i) \Delta y_i. \quad (1.14)$$

де Δy_i – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Oy (рис. 1.3).

Криволінійним інтегралом по координатах (другого роду) називають суму

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy \quad \text{або} \quad \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (1.15)$$

Для просторової кривої криволінійний інтеграл другого роду:

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Механічний зміст: криволінійний інтеграл II роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

Властивості криволінійного інтеграла другого роду.

Якщо порівняти означення криволінійного інтеграла першого роду з означенням криволінійного інтеграла другого роду, то бачимо, що в першому випадку при складанні інтегральної суми, значення функції $f(\xi_i; \eta_i)$ домножали на довжину ділянки кривої, а у випадку інтеграла другого роду це значення множимо на проекцію Δx_i (Δy_i) ділянки на вісь x (вісь y). Для інтегралів першого роду напрям шляху дуги AB не має значення, бо довжина окремої ділянки дуги від нього не залежить. У випадку інтегралів другого роду проекція цієї ділянки на ту чи іншу вісь залежить від напрямку дуги і змінює знак із зміненням цього напрямку на протилежний, тому маємо наступну властивість.

1°. Криволінійний інтеграл II роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування:

$$\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Інші властивості аналогічні властивостям інтеграла I роду.

1.2.2. Обчислення криволінійних інтегралів другого роду.

- Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a; b]$, то криволінійний інтеграл II роду обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx. \quad (1.16)$$

Аналогічно, якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, де функція $x(y)$ і її похідна $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c; d]$, то криволінійний інтеграл II роду обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy. \quad (1.17)$$

- Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt. \quad (1.18)$$

На випадок, якщо крива знаходиться у просторі, то формула (1.18) буде матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Зауваження. Для замкненого контуру, тобто коли початкова і кінцева точки збігаються, існує лише два напрями обходу: проти годинникової стрілки (додатна орієнтація контуру) та за годинниковою стрілкою (від'ємна орієнтація

контур). Тоді криволінійний інтеграл по додатно орієнтованому контуру позначають так:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

1.2.3. Застосування криволінійних інтегралів другого роду.

Геометричні застосування. Обчислення площі плоскої фігури.

Площа S фігури, яка обмежена простим замкненим контуром C , знаходиться за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx, \quad (1.19)$$

де при обході області, яка обмежена цим контуром, область залишається зліва.

Механічні застосування. Обчислення роботи.

Нехай сила F виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L , причому функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, неперервні на кривій L ; тоді

$$A = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad \vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}. \quad (1.20)$$

1.3. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.

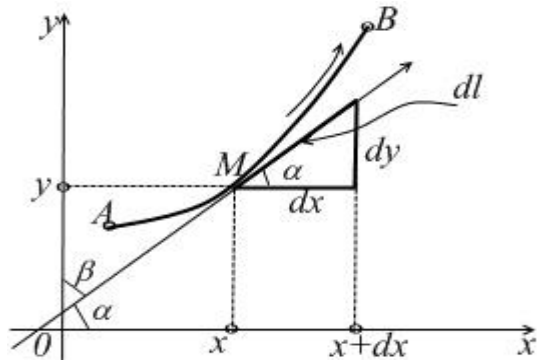


Рис. 1.4

Позначимо через α і β кути, які утворює з осями координат пряма дотична до кривої AB у точці $M(x, y)$ (рис. 1. 4). За додатний напрям дотичної беремо той, який відповідає напрямку руху точки по кривій від A до B . Враховуючи геометричний зміст диференціала функції (приріст ординати дотичної до кривої в т. M) та диференціала дуги (довжина відповідного відрізка дотичної до кривої в т. M), маємо

$$dx = \cos \alpha dl, \quad dy = \cos \beta dl. \quad (1.21)$$

Замінюючи в криволінійних інтегралах другого роду dx та dy їхніми значеннями (1.21), перетворимо ці інтеграли в криволінійні інтеграли першого роду:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} P \cos \alpha dl + Q \cos \beta dl. \quad (1.22)$$

Зауваження. При зміні напрямку руху точки по кривій формули (1.22) не змінюються, оскільки при цьому змінюють знак dx , dy , $\cos \alpha$, $\cos \beta$.

1.4. Зв'язок між подвійним інтегралом по області D і криволінійним інтегралом по межі L цієї області (формула Гріна).

Якщо L – межа області D і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ неперервні в замкненої області D , то

справедлива *формула Гріна*:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (1.23)$$

причому обхід контуру L обирається так, що область D залишається зліва.

1.5. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.

Значення криволінійного інтеграла може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може і не залежати. Зв'ясуємо умови, при яких існує така незалежність.

Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області D і контур L знаходиться в цій області. Тоді необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ від контуру інтегрування є виконання в області D

тотожності
$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При виконанні вказаних умов криволінійний інтеграл по будь – якому замкненому контуру L , який міститься в області D , дорівнює нулю:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Для обчислення інтеграла $\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, який не залежить від

контуру інтегрування (тобто, умова $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ виконана), найкращим шляхом інтегрування слід обрати ламану, яка з'єднає точки (x_0, y_0) і (x_1, y_1) , ланки якої паралельні осям Ox та Oy .

Тема 2. Поверхневі інтеграли.

2.1. Поверхневі інтеграли I роду.

2.1.1. Означення та властивості поверхневого інтеграла I роду.

Поверхневі інтеграли першого роду є узагальненням подвійних інтегралів.

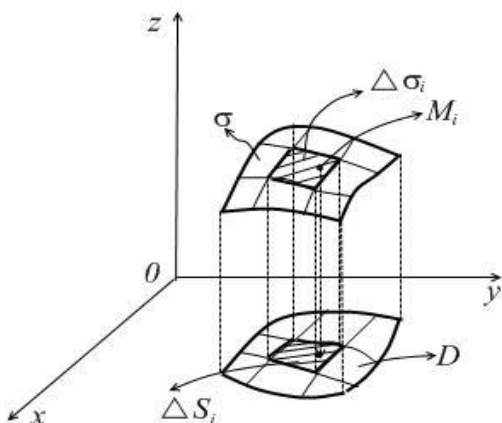


Рис. 2.1

Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня, яка складається із скінченного числа неперервно сполучених гладких поверхонь, називається *кусково – гладкою*.

Нехай в точках деякої кусково – гладкої поверхні σ визначена обмежена функція $f(M) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню σ на

n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок (рис. 2.1); нехай $\Delta \sigma_i$ – площа, а $\text{diam}(\sigma_i)$ –

– діаметр частини поверхні σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині σ_i виберемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i. \quad (2.1)$$

Цю суму називають інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ .

Якщо при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam}(\sigma_i) \rightarrow 0$ інтегральні суми (2.1) мають скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ , ні від вибору точок M_i , цю границю називають поверхневим інтегралом I роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ і позначають $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$. Тобто

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta \sigma_i. \quad (2.2)$$

Функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою* по поверхні σ , а поверхня σ – *областю інтегрування*.

Зауваження 1. Оскільки означення поверхневого інтеграла першого роду аналогічно означенням подвійного інтеграла і криволінійного інтеграла першого роду, тому він має ті самі властивості вказаних інтегралів.

Зауваження 2. Поверхневий інтеграл першого роду не залежить від вибору сторони поверхні.

5.1.2. Обчислення поверхневого інтеграла I роду.

Обчислення поверхневого інтеграла I роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

- Нехай гладка поверхня σ , задана рівнянням $z = z(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D (рис. 2.1). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , а функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D , то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy. \quad (2.3)$$

- Якщо гладка поверхня σ , задана рівнянням $y = y(x, z)$, проектується на площину Oxz в область D_{xz} , то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y'^2_x(x, z) + y'^2_z(x, z)} dx dz. \quad (2.4)$$

- Якщо гладка поверхня σ , задана рівнянням $x = x(y, z)$, проектується на площину Oyz в область D_{yz} , то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'^2_y(y, z) + x'^2_z(y, z)} dy dz. \quad (2.5)$$

5.1.3. Застосування поверхневих інтегралів першого роду.

1°. Обчислення площі поверхні.

Якщо у формулі (2.2) покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні σ , то дістанемо формулу для обчислення площі P цієї поверхні

$$P = \iint_{\sigma} d\sigma. \quad (2.6)$$

Якщо на кусково – гладкої поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то

2°. Маса матеріальної поверхні обчислюється за формулою:

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma. \quad (2.7)$$

3°. Координати центра маси поверхні:

$$x_c = \frac{1}{m} M_{yz} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} x \gamma d\sigma, \quad y_c = \frac{1}{m} M_{xz} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} y \gamma d\sigma, \quad z_c = \frac{1}{m} M_{xy} = \frac{1}{m} \iint_{\sigma} z \gamma d\sigma, \quad (2.8)$$

де M_{yz} , M_{xz} , M_{xy} – статичні елементи поверхні σ відносно осей Ox , Oy , Oz .

4°. Моменти інерції поверхні відносно осей координат і початку координат:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma d\sigma, & I_y &= \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma d\sigma, \\ I_z &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma, & I_o &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma d\sigma. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2. Поняття поля. Скалярні та векторні поля. Фізичний зміст поверхневого інтеграла II роду.

Полем називають область простору, кожній точці P якої поставлено у відповідність деяка величина $F(P)$. В залежності від природи $F(P)$ поля поділяють на *скалярні* та *векторні*.

Означення. Якщо величина $F(P)$ в кожній точці області приймає певне числове значення, то поле називають скалярним (наприклад, поле температури, атмосферного тиску).

Скалярне поле величини u в області D можна задати у вигляді скалярної функції $u(P) = u(x, y, z)$, $P \in D$.

Означення. Якщо величина $F(P)$ в кожній точці області приймає векторне значення, то її поле називають векторним (наприклад, поле сили тяжіння, поле швидкості).

Векторне поле в області D задається векторною функцією

$$\vec{F}(P) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – скалярні функції.

Нехай у просторі задано поверхню σ , обмежену просторовою лінією L . Відносно поверхні σ будемо припускати, що в кожній її точці визначено нормаль $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, ($|\vec{n}| = 1$).

Нехай в кожній точці поверхні σ визначено векторну функцію

$$\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ .

Розіб'ємо поверхню σ довільним способом на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частини візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, обчислимо в ній значення функції $\vec{F}_i = \vec{F}(M_i)$, потім візьмемо скалярний добуток векторів $\vec{F}_i$ та $\vec{n}_i$, і складемо суму $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i$.

Ця сума є інтегральною, а її скінчена границя за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин зветься *поверхневим інтегралом II роду* (або *поверхневим інтегралом по координатах*):

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i. \quad (2.10)$$

Розглянемо докладніше вираз i -го доданку. За правилами обчислення скалярного добутку

$$\vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i = |\vec{F}_i| \cdot |\vec{n}_i| \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\sigma_i = |\vec{F}_i| \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\sigma_i.$$

Останній вираз можна тлумачити таким чином: цей добуток визначає об'єм циліндру з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\vec{F}_i| \cdot \cos\varphi$ (рис. 2.2). Отже, коли визнати,

що векторне поле $\vec{F}$ є швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ , то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка протікає через елемент площі $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора $\vec{F}_i$.

Вираз $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ являє собою загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню σ .

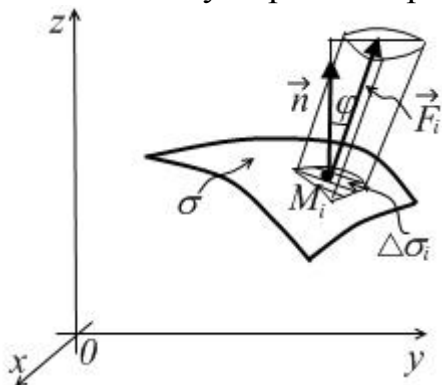


Рис. 2.2

Таким чином, поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ є *потік векторного поля $\vec{F}$ через поверхню σ* (фізичний зміст поверхневого інтеграла II роду).

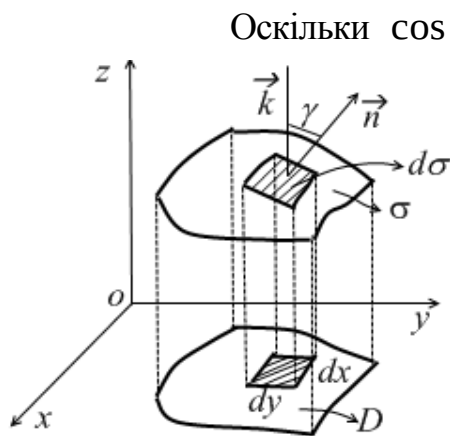
Якщо розкрити скалярний добуток, то одержимо:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) d\sigma.$$

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів, тоді і інтеграл $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ також можна виразити через суму трьох інтегралів:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} P\vec{i} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma} Q\vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma + \iint_{\sigma} R\vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Розглянемо останній з інтегралів: $\iint_{\sigma} R \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma$. $\vec{k} \cdot \vec{n} = |\vec{k}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \gamma$ (рис. 2.3).



Оскільки $\cos \gamma d\sigma$ є проекція елемента площі $d\sigma$ на площину xOy :

$$\cos \gamma d\sigma = dxdy, \text{ то } \iint_{\sigma} R \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} R dxdy.$$

Аналогічно:

$$\cos \alpha d\sigma = dydz, \quad \cos \beta d\sigma = dxdz.$$

Весь інтеграл записується так:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma} P dydz + Q dxdz + R dxdy.$$

Зауважимо, що в запису

$$\iint_{\sigma} P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma d\sigma$$

Рис. 2.3

в дужках є скалярна функція. Позначивши її через

$$u(x, y, z) = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma,$$

маємо $\iint_{\sigma} u(x, y, z) d\sigma$, тобто поверхневий інтеграл I роду.

Отже, зв'язок між поверхневими інтегралами I та II роду визначається рівністю:

$$\iint_{\sigma} P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma d\sigma = \iint_{\sigma} P dydz + Q dxdz + R dxdy \quad (2.11)$$

2.3. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.

Поверхневі інтеграли II роду обчислюються за допомогою подвійних інтегралів:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy &= \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy; \\ \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz &= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz; \\ \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dxdz &= \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dxdz, \end{aligned} \quad (2.12)$$

де поверхня σ задана рівняннями $z = f(x, y)$, $x = f(y, z)$, $y = f(x, z)$. D_{xy} , D_{yz} , D_{xz} – проекції поверхні σ на площини Oxy , Oyz , Oxz . Знак «плюс» беремо в цих формулах тоді, коли нормаль до поверхні утворює з осями Ox , Oy ; Oy , Oz ; Ox , Oz відповідно гострі кути, а знак «мінус» - коли тупі кути.

Загальний інтеграл (2.11) обчислюють, проектуючи поверхню σ на всі три координатні площини за формулою:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy &= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \\ &\pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dxdz \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Зауваження. Якщо σ – циліндрична поверхня з твірними, які паралельні осі Oz , то $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = 0$. У випадку, якщо твірні поверхні паралельні осям Ox і Oy , то відповідні складові поверхневого інтеграла теж дорівнюють нулю.

3. Формула Остроградського – Гаусса. Формула Стокса.

Формула Остроградського – Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Якщо функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області G простору, яка обмежена замкнутою гладкою поверхнею σ , то справедлива формула *Остроградського – Гаусса*:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \quad (2.14)$$

Зауваження 1. На практиці формулу Остроградського – Гаусса можна застосовувати для обчислення об'ємів тіл, якщо відома поверхня, яка обмежує це тіло.

Зауваження 2. Якщо σ – замкнена кусково – гладка поверхня, одиничний вектор зовнішньої нормалі якої $n^o = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, тоді потік Π вектора $F = (P, Q, R)$ через поверхню σ можна обчислити за формулою Остроградського – Гаусса:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}^o d\sigma = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (2.15)$$

Зауваження 3. Також мають місце формули:

$$V = \iiint_{\sigma} x dy dz = \iiint_{\sigma} y dx dz = \iiint_{\sigma} z dx dy = \iiint_V dx dy dz \quad (2.16)$$

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами.

Якщо функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку на поверхні σ і L – замкнений контур, який обмежує цю поверхню, то справедлива *формула Стокса*:

$$\begin{aligned} & \oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ & = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні σ ; напрям нормалі обирається так, щоб із сторони нормалі обхід контуру L відбувався проти годинникової стрілки.

Формулу Стокса можна записати в наступному вигляді:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.18)$$

Тема 3. Поверхні другого порядку.

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + gx + hy + kz + l = 0, \quad (3.1)$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Рівняння (3.1) називається загальним рівнянням поверхні другого порядку. До поверхонь другого порядку належать циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний гіперболоїди.

3.1. Циліндричні поверхні.

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ , утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напряму) і паралельні заданій прямій l (рис.1).

Нехай задане рівняння $f(x, y) = 0, \quad (3.2)$

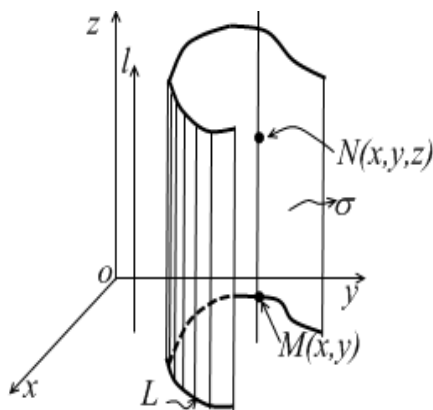


Рис. 3.1

яке в площині Oxy (рис.3.1) визначає деяку лінію L – множину точок $M(x, y)$, координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх точок $N(x, y, z)$ простору, у яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь – якої точки лінії L , а третя координата z – довільна, тобто тих точок простору, які проєктуються на площину Oxy в точки лінії L . Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L в точці

$M(x, y)$. Сукупність таких прямих і є циліндричною

поверхнею σ . Отже, рівняння (3.2) визначає циліндричну поверхню σ , твірні якої паралельні осі Oz , а напрямна L в площині Oxy задається тим самим рівнянням $f(x, y) = 0$, а в просторі $Oxyz$ ця сама лінія задається двома рівняннями:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Приклади циліндричних поверхонь.

1°. Прямий круговий циліндр. Його твірні паралельні осі Oz , а напрямною в площині Oxy є коло $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 3.2, а). Канонічне рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2°. Еліптичний циліндр (рис. 3.2, б). Канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3°. Гіперболічний циліндр (рис. 3.2, в). Канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4°. Параболічний циліндр (рис. 3.2, г). Канонічне рівняння - $y^2 = 2px$.

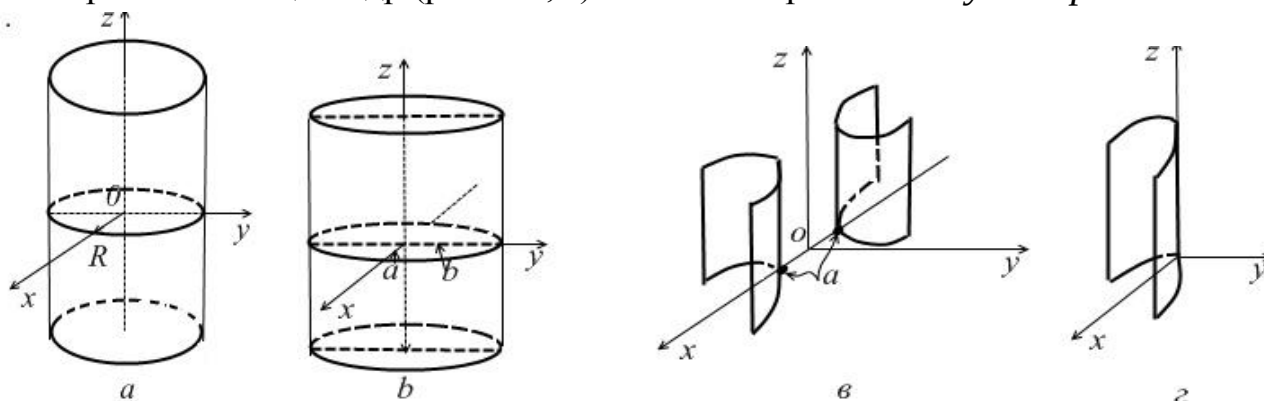


Рис. 3.2

3.2. Конічні поверхні.

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L . При цьому лінія L називається *напрямною конічної поверхні*, точка P – її *вершиною*, а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню, – *твірною*.

Рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $O(0, 0, 0)$, віссю якої є вісь Oz (рис. 3.3):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

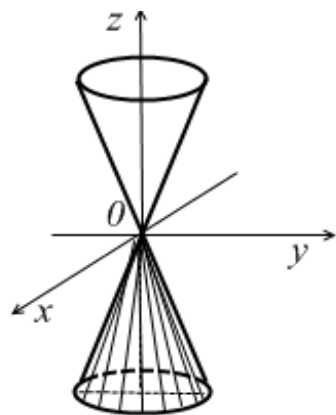


Рис. 3.3

Розглянемо переріз цієї поверхні площиною $z = h$ ($h \neq 0$). Маємо

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ z = h \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Ця система визначає у площині $z = h$ еліпс з півосями

$$a^* = \frac{a}{c}|h| \quad \text{і} \quad b^* = \frac{b}{c}|h|.$$

Рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $O(0, 0, 0)$, віссю якої є вісь Oy :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $O(0, 0, 0)$, віссю якої є вісь Ox :

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

3.3. Поверхні обертання.

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої

прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l , називають *поверхнею обертання*.

Рівняння поверхні обертання кривої $\begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$ навколо осі Oz :

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Рівняння поверхні обертання кривої $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ навколо осі Ox :

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

Рівняння поверхні обертання кривої $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ навколо осі Oy :

$$F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

Рівняння поверхонь обертання, утворені обертанням еліпса, гіперболи і параболу навколо їх осей симетрії.

1°. *Еліпсоїд обертання* (вісь обертання – Oz).

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2°. *Однопорожнинний гіперболоїд обертання* (вісь обертання – Oz , яка є уявною віссю гіперболи, обертанням якої утворилась ця поверхня).

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3°. *Двопорожнинний гіперболоїд обертання* (вісь обертання – Oz , яка є дійсною віссю гіперболи, обертанням якої утворилась ця поверхня).

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

4°. *Параболоїд обертання* (вісь обертання – Oz).

$$\frac{x^2 + y^2}{P} = 2z.$$

Аналогічно можуть бути записані рівняння для розглянутих вище поверхонь обертання, якщо віссю обертання є вісі Ox або Oy .

3.4. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку.

Поверхні обертання є окремим випадком поверхонь другого порядку:

1. *Сфера*. Канонічне рівняння:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

2. *Тривісний еліпсоїд* (рис. 3.4, а). Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

У перетині еліпсоїда площинами, які паралельні координатним площинам отримуються еліпси з різними осями.

3. *Однопорожнинний гіперболоїд* (рис. 3.4, б). Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Перерізи цієї поверхні площинами, які паралельні площині xOy , є еліпси, а площинами, які паралельні площинам yOz , xOz є гіперболи.

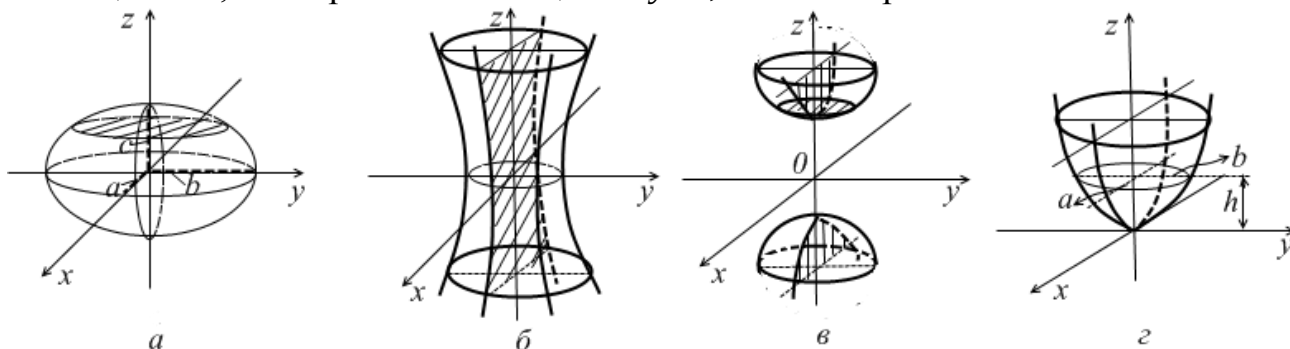


Рис. 3.4

4. *Двопорожнинний гіперболоїд* (рис. 3.4, в). Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Перерізи цієї поверхні площинами, які паралельні площині xOy , є еліпси, а площинами, які паралельні площинам yOz , xOz є гіперболи.

5. *Еліптичний параболоїд* (рис. 3.4, г). Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{де } p > 0, q > 0.$$

Лініями паралельних перерізів площинами, які паралельні площинам yOz , xOz є параболи. Якщо ж розглядати переріз поверхні площиною, паралельною площині xOy , тобто $z = h$ ($h > 0$), то дістанемо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h, \quad \text{де } z = h(h > 0) \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1, \quad \text{де } z = h(h > 0),$$

тобто маємо еліпс з півсями $a = \sqrt{2ph}$, $b = \sqrt{2qh}$.

Зокрема, якщо $p = q$, то маємо параболоїд обертання $x^2 + y^2 = p2z$. Переріз його площиною $z = h(h > 0)$ є коло радіуса $r = \sqrt{2ph}$.

6. *Гіперболічний параболоїд* (рис. 3.5). Канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Лініями паралельних перерізів гіперболічного параболоїда є гіперболи або параболи.

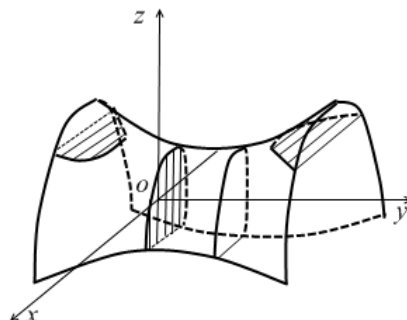


Рис. 3.5

Контрольна робота по темі «Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли»

Типовий розрахунок складається із восьми задач різних тем, кожна з яких має 30 варіантів.

При оформленні контрольної роботи необхідно дотримуватись таких вимог:

1. Контрольна робота повинна виконуватися в окремому зошиті.
2. Умови і розв'язання завдань треба нумерувати і записувати в зошиті в такій же послідовності, як вони записані в контрольному завданні.
3. При розв'язуванні завдань необхідні короткі, але змістовні і зрозумілі пояснення. Необхідно вказувати правила, формули і теореми, що використовуються при розв'язанні задач.
4. Всі обчислення і проміжні дії повинні бути записані повністю в розв'язанні задачі. Не можна обмежуватися тільки записом кінцевого результату (відповіді).
5. Відповіді повинні бути записані окремо, в кінці розв'язку задачі.
6. Контрольна робота повинна бути виконана акуратно. Сторінки зошита повинні бути пронумеровані і на кожній з них залишені поля шириною 2-3 см для зауважень.
7. Номер варіанту контрольної роботи останніми двома цифрами залікової книжки студента. Всі варіанти представлені таблицею (табл. 1), в кожній клітинці якої записані номери восьми задач. Кожна клітинка визначається номером стовпчика і номером рядка. Номер стовпчика співпадає з останньою цифрою варіанта, а номер рядка – з передостанньою.

Таблиця 1. Варіанти для виконання контрольної роботи.

Остання цифра Передостання цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	6, 7, 8, 9, 10, 11,12, 13	7, 8, 9,10, 11, 12,13, 14	8,9,10,11, 12,13,14, 15	9,10,11, 12,13,14, 15,16	10,11,12, 13,14,15, 16,17
1	11,12,13, 14,15,16, 17,18	12,13,14, 15,16,17, 18,19	13,14,15, 16,17,18, 19,20	14,15,16, 17,18,19, 20,21	15,16,17, 18,19,20, 21,22	16,17,18, 19,20,21, 22,23	17,18,19, 20,21,22, 23,24	18,19,20, 21,22,23, 24,25	19,20,21, 22,23,24, 25,26	20,21,22, 23,24,25, 26,27
2	21,22,23, 24,25,26, 27,28	22,23,24, 25,26,27, 28,29	23,24,25, 26,27,28, 29,30	24,25,26, 27,28,29, 30,1	25,26,27, 28,29,30, 1,2	26,27,28, 29,30,1, 2,3	27,28,29, 30,1,2,3, 4	28,29,30, 1,2,3,4,5	29,30,1,2, 3,4,5,6	30,1,2,3,4, 5,6,7
3	1,30,2,29, 3,28,4,27	2,29,3,28, 4,27,5,26	3,28,4,27, 5,26,6,25	4,27,5,26, 6,25,7,24	5,26,6,25, 7,24,8,23	6,25,7,24, 8,23,9,22	7,24,8,23, 9,22,10, 21	8,23,9,22, 10,21,11, 20	9,22,10, 21,11,20, 12,19	10,21,11, 20,12,19, 13,18
4	11,20,12, 19,13,18, 14,17	12,19,13, 18,14,17, 15,16	13,18,14, 17,15,16, 17	14,17,15, 16,17,18, 19	1,16,2,17, 3,18,4,19	2,17,3,18, 4,19,5,20	3,18,4,19, 5,20,6,21	4,19,5,20, 6,21,7,22	5,20,6,21, 7,22,8,23	6,21,7,22, 8,23,9,24
5	7,22,8,23, 9,24,10, 25	8,23,9,24, 10,25,11, 26	9,24,10, 25,11,26, 12,27	10,25,11, 26,12,27, 13,28	11,26,12, 27,13,28, 14,29	12,27,13, 28,14,29, 15,30	13,28,14, 29,15,30, 17,16	14,29,15, 30,18,17, 16,15	15,30,19, 18,17,16, 15,14	30,29,28, 27,26,25, 24,23
6	29,28,27, 26,25,24, 23,22	28,27,26, 25,24,23, 22,21	27,26,25, 24,23,22, 21,20	26,25,24, 23,22,21, 20,19	25,24,23, 22,21,20, 19,18	24,23,22, 21,20,19, 18,17	23,22,21, 20,19,18, 17,16	22,21,20, 19,18,17, 16,15	21,20,19, 18,17,16, 15,14	20,19,18, 17,16,15, 14,13
7	19,18,17, 16,15,14, 13,12	18,17,16, 15,14,13, 12,11	17,16,15, 14,13,12, 11,10	16,15,14, 13,12,11, 10,9	15,14,13, 12,11,10, 9,8	14,13,12, 11,10,9, 8,7	13,12,11, 10,9,8,7, 6	12,11,10, 9,8,7,6,5	11,10,9, 8,7,6,5,4	10,9,8,7, 6,5,4,3
8	9,8,7,6,5, 4,3,2	1,4,7,10, 13,16,19, 22	2,5,8,11, 14,17,20, 23	3,6,9,12, 15,18,21, 24	4,7,10,13, 16,19,22, 25	5,8,11,14, 17,20,23, 26	6,9,12,15, 18,21,24, 27	1,3,5,7, 9,11,13, 15	2,4,6,8, 10,12,14, 16	3,5,7,9, 11,13,15, 17
9	4,6,8,10, 12,14,16, 18	5,7,9,11, 13,15,17, 19	6,8,10,12, 14,16,18, 20	7,9,11,13, 15,17,19, 21	8,10,12, 14,16,18, 20,22	9,11,13, 15,17,19, 21,23	10,12,14, 16,18,20, 22,24	12,14,16, 18,20,22, 24,26	13,15,17, 19,21,23, 25,27	14,16,18, 20,22,24, 26,28

Завдання 1. Обчислити криволінійні інтеграли I роду.

1. $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де L – перший віток конічної гвинтової лінії
 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. $\oint_L (x^2 + y^2) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$.
3. $\int_{AB} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$.
4. $\int_{OB} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L_{OB} – відрізок прямої OB , $O(0, 0)$, $B(2, 2)$.
5. $\int_{AB} \frac{dl}{\sqrt{5}(x - y)}$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(0, 4)$, $B(4, 0)$.
6. $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
7. $\int_{AB} y dl$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками $A(1, 0)$ і $B(0, 1)$.
8. $\int_{OA} y dl$, де L_{OA} – дуга параболи $y^2 = \frac{2}{3}x$ між точками $O(0, 0)$ і $A(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3})$.
9. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, де L – дуга кривої
 $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
10. $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.
11. $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L – перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.
12. $\int_{OB} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L_{OB} – відрізок прямої, який з'єднує точки $O(0, 0)$ і $B(1, 2)$.
13. $\int_L \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dl$, де L – дуга кривої $\rho = 9 \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.
14. $\int_{OABC} xy dl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$, $C(0, 2)$.

15. $\int_{ABO} (x+y)dl$, де L_{ABO} – контур трикутника з вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$.
16. $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L – перший віток гвинтової лінії
 $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = 2t$.
17. $\int_{ABO} (x+y)dl$, де L_{ABO} – контур трикутника з вершинами $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$.
18. $\int_L (x+y)dl$, де L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.
19. $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2y$.
20. $\int_{OABC} xydl$, де L_{OABC} – контур прямокутника з вершинами $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(5, 3)$, $C(0, 3)$.
21. $\oint_L (x^2 + y^2)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4x$.
22. $\int_{AB} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y})dl$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками $A(1, 0)$ і $B(0, 1)$.
23. $\int_L xydl$, де L – контур квадрата зі сторонами $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.
24. $\int_L y^2 dl$, де L – перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.
25. $\int_{ABCD} xydl$, де L_{ABCD} – контур прямокутника з вершинами $A(2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 3)$, $D(2, 3)$.
26. $\int_L ydl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$, відсічена параболою $x^2 = 2y$.
27. $\int_{AB} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} – відрізок прямої між точками $A(4, 0)$ і $B(6, 1)$.
28. $\int_L (x^2 + y^2)^2 dl$, де L – перша чверть кола $\rho = 2$.
29. $\int_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, який з'єднує точки $A(1, 1, 1)$ і $B(2, 2, 2)$.
30. $\oint_L (x-y)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2x$.

Завдання 2. Обчислити криволінійні інтеграли II роду.

1. $\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

2. $\int_{AB} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} – дуга астройди $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ від точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$.

3. $\int_{AB} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, де L_{AB} – дуга кубичної параболи $y = x^3$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

4. $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L – коло $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при додатному напрямку обходу.

5. $\oint_L (x^2 y - x)dx + (y^2 x - 2y)dy$, де L – дуга еліпса $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при додатному напрямку обходу.

6. $\int_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y dy$, де L_{AB} – дуга еліпса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ від точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$.

7. $\int_{L_{UBA}} 2xydx - x^2 y dy$, де L_{OBA} – ламана OBA , $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $A(2, 1)$.

8. $\int_{AB} (x^2 - y^2)dx + xydy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(1, 1)$, $B(3, 4)$.

9. $\int_{AB} \cos y dx - \sin x dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(2\pi, -2\pi)$, $B(-2\pi, 2\pi)$.

10. $\int_{AB} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(1, 2)$, $B(3, 6)$.

11. $\int_{AB} xydx + (y - x)dy$, де L_{AB} – дуга кубичної параболи $y = x^3$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

12. $\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2)dx + (x + y^2)ydy$, де L_{ABC} – ламана ABC , $A(1, 2)$, $B(3, 2)$, $C(3, 5)$.

13. $\int_{OB} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$, де L_{OB} – відрізок прямої OB , $O(0, 0, 0)$, $B(-2, 4, 5)$.

14. $\int_{OA} ydx + xdy$, де L_{OA} – дуга кола $x = R \cos t$, $y = R \sin t$; $O(R, 0)$, $A(0, R)$.

15. $\int_{OA} xydx + (y - x)dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y^2 = x$ від точки $O(0, 0)$ до точки $A(1, 1)$.

16. $\int_{AB} xdx + ydy + (x - y + 1)dz$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$.
17. $\int_{AB} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ від точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 2)$.
18. $\int_{OB} xydx + (y - x)dy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.
19. $\int_{OB} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.
20. $\int_{AB} xdy - ydx$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2, 0)$ до точки $B(0, 2)$.
21. $\int_{AB} (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2 dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.
22. $\int_{AB} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB , $A(1, 0)$, $B(0, 2)$.
23. $\int_{AB} 2xydx + y^2 dy + z^2 dz$, де L_{AB} – дуга одного вітка гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$; $A(1, 0, 0)$, $B(1, 0, 4\pi)$.
24. $\int_{AB} \frac{y}{x} dx + xdy$, де L_{AB} – дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1, 0)$ до точки $B(e, 1)$.
25. $\oint_L ydx - xdy$, де L – дуга еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ при додатному напрямку обходу.
26. $\int_{OA} 2xydx - x^2 dy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$ від точки $O(0, 0)$ до точки $A(2, 1)$.
27. $\int_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)ydy$, де L_{AB} – ламана лінія $y = |x|$ від точки $A(-1, 1)$ до точки $B(2, 2)$.
28. $\int_{OA} 2xydx - x^2 dy + zdz$, де L_{OA} – відрізок прямої, який з'єднує точки $O(0, 0, 0)$, $A(2, 1, -1)$.
29. $\oint_L xdy - ydx$, де L – контур трикутника з вершинами $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ при додатному напрямку обходу.

30. $\int_{L_{ACB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)ydy$, де L_{ACB} – ламана ACB , $A(2, 0)$, $C(5, 0)$, $B(5, 3)$.

Завдання 3. Фігура D обмежена даними лініями. Треба:

1. обчислити площу D двома способами: подвійним інтегралом і криволінійним інтегралом;
2. знайти координати центру мас фігури D ;
3. обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури D навколо осі OX двома способами: визначенням інтегралом та за теоремою Гульдіна.

- | | |
|--|--|
| 1. $y = x, y = x^2$. | 16. $y = -x, y = -\sqrt[3]{x}, x \geq 0$. |
| 2. $y = -x, y = x^2$. | 17. $y = x, y = x^4$. |
| 3. $y = -x, y = -x^2$. | 18. $y = -x, y = x^4$. |
| 4. $y = x, y = -x^2$. | 19. $y = x, y = -x^4, x \leq 0$. |
| 5. $y = x, y = \sqrt{x}$. | 20. $y = -x, y = -x^4, x \geq 0$. |
| 6. $y = -x, y = -\sqrt{x}$. | 21. $y = x, y = \sqrt[4]{x}$. |
| 7. $y = -x, y = \sqrt{-x}$. | 22. $y = -x, y = -\sqrt[4]{x}$. |
| 8. $y = x, y = -\sqrt{-x}$. | 23. $y = -x, y = \sqrt[4]{-x}$. |
| 9. $y = x, y = x^3, x \geq 0$. | 24. $y = x, y = -\sqrt[4]{-x}$. |
| 10. $y = x, y = x^3, x \leq 0$. | 25. $y = x, y = x^5, x \geq 0$. |
| 11. $y = -x, y = -x^3, x \geq 0$. | 26. $y = x, y = x^5, x \leq 0$. |
| 12. $y = -x, y = -x^3, x \leq 0$. | 27. $y = -x, y = -x^5, x \leq 0$. |
| 13. $y = x, y = \sqrt[3]{x}, x \geq 0$. | 28. $y = -x, y = -x^5, x \geq 0$. |
| 14. $y = x, y = \sqrt[3]{x}, x \leq 0$. | 29. $y = x, y = x^6$. |
| 15. $y = -x, y = -\sqrt[3]{x}, x \leq 0$. | 30. $y = x, y = -x^6$. |

Завдання 4. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки A до точки B . Зробити малюнок.

1. $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, $L: \overline{AB}$, $A(-4;0)$, $B(0;2)$
2. $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, $L: \overline{AB}$, $A(-4;0)$, $B(0;2)$
3. $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, $L: y = 2 - \frac{x^2}{8}$, $A(-4;0)$, $B(0;2)$
4. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$, $L: x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0)$, $A(2;0)$, $B(-2;0)$
5. $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$, $L: x^2 + y^2 = 4, (x \geq 0, y \geq 0)$, $A(2;0)$, $B(0;2)$

6. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}, L: y = x^2, A(-1;1), B(1;1)$
7. $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - y\vec{j}, L: \overline{AB}, A(-1;0), B(0;1)$
8. $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 9, (y \geq 0), A(3;0), B(-3;0)$
9. $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}, L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1, (x \geq 0, y \geq 0), A(1;0), B(0;3)$
10. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 1, (y \geq 0), A(1;0), B(-1;0)$
11. $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j}, L: y = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, 1 \leq x \leq 2, \end{cases} A(2;0), B(0;0)$
12. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 2, (y \geq 0), A(\sqrt{2};0), B(-\sqrt{2};0)$
13. $\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 1, (x \geq 0, y \geq 0), A(1;0), B(0;1)$
14. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}, L: 2x^2 + y^2 = 1, (y \geq 0), A(\frac{1}{\sqrt{2}};0), B(-\frac{1}{\sqrt{2}};0)$
15. $\vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j}), L: x^2 + y^2 = R^2, (y \geq 0), A(R;0), B(-R;0)$
16. $\vec{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\vec{j},$
 $L: x^2 + y^2 = 1, (y \geq 0), A(1;0), B(-1;0)$
17. $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - xy^2\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 4, (x \geq 0, y \geq 0), A(2;0), B(0;2)$
18. $\vec{F} = (x + y\sqrt{x^2 + y^2})\vec{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\vec{j},$
 $L: x^2 + y^2 = 16, (x \geq 0, y \geq 0), A(4;0), B(0;4)$
19. $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 9, (x \geq 0, y \geq 0), A(3;0), B(0;3)$
20. $\vec{F} = (x + y)^2\vec{i} - (x^2 + y^2)\vec{j}, L: \overline{AB}, A(1;0), B(0;1)$
21. $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + y^2\vec{j}, L: \overline{AB}, A(2;0), B(0;2)$
22. $\vec{F} = x^2\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 9, (x \geq 0, y \geq 0), A(3;0), B(0;3)$
23. $\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2xy + x)\vec{j}, L: x^2 + y^2 = 9, (y \geq 0), A(3;0), B(-3;0)$
24. $\vec{F} = xy\vec{i}, L: y = \sin x, A(\pi;0), B(0;0)$
25. $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\vec{j}, L: y = 2x^2, A(0;0), B(1;2)$
26. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}, L: \overline{AB}, A(1;0), B(0;3)$
27. $\vec{F} = (xy - x)\vec{i} + \frac{x^2}{2}\vec{j}, L: y = 2\sqrt{x}, A(0;0), B(1;2)$

$$28. \vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}, L: x^2 + \frac{y^2}{9} = 1, (x \geq 0, y \geq 0), A(1;0), B(0;3)$$

$$29. \vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}, L: y = x^3, A(0;0), B(2;8)$$

$$30. \vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}, L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, (y \geq 0), A(3;0), B(-3;0)$$

Завдання 5. Знайти масу кривої із заданої лінійною щільністю.

1. Знайти масу кривої $r = 2 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \cos \varphi$.
2. Знайти масу кривої $r = 3 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ з лінійною щільністю $\gamma = \operatorname{tg} \varphi$.
3. Знайти масу кривої $r = 5\varphi$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{r}{2}$.
4. Знайти масу кривої $r = 8\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.
5. Знайти масу кривої $r = e^{3\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ з лінійною щільністю $\gamma = \varphi$.
6. Знайти масу кривої $r = 2(1 - \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$ з лінійною щільністю $\gamma = \sqrt{\varphi}$.
7. Знайти масу кривої $r = 7(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \sin \varphi$.
8. Знайти масу кривої $r = 2e^{-\varphi}$, $-\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq -\pi$ з лінійною щільністю $\gamma = \varphi^2$.
9. Знайти масу кривої $r = \cos \varphi$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{1}{r^2}$.
10. Знайти масу кривої $r = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.
11. Знайти масу кривої $r = 1 - \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$ з лінійною щільністю $\gamma = |\sin \varphi|$.
12. Знайти масу кривої $r = 5e^{2\varphi}$, $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ з лінійною щільністю $\gamma = \sin \varphi$.
13. Знайти масу кривої $r = 4(1 + \sin \varphi)$, $\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \sqrt{\varphi^3}$.
14. Знайти масу кривої $r = 8 \sin \varphi$, $1 \leq \varphi \leq e$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{\ln \varphi}{\varphi}$.
15. Знайти масу кривої $r = 4 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 1$ з лінійною щільністю $\gamma = \sqrt{1+\varphi}$.
16. Знайти масу кривої $r = 10\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ з лінійною щільністю $\gamma = \sqrt{1+\varphi^2}$.

17. Знайти масу кривої $r = 6 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = 5\varphi$.
18. Знайти масу кривої $r = 3(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$.
19. Знайти масу кривої $r = 1 + \sin \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{1}{\sqrt{r}}$.
20. Знайти масу кривої $r = 4e^{\frac{\varphi}{2}}$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$ з лінійною щільністю $\gamma = 1 + \cos \varphi$.
21. Знайти масу кривої $r = 4e^{\frac{5\varphi}{2}}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = 1 + \varphi$.
22. Знайти масу кривої $r = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{2r}{\sqrt{1+r^2}}$.
23. Знайти масу кривої $r = 6(1 - \cos \varphi)$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ з лінійною щільністю $\gamma = \operatorname{tg} \varphi$.
24. Знайти масу кривої $r = 5 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{\varphi}{2 + 3\varphi^2}$.
25. Знайти масу кривої $r = e^{-4\varphi}$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$ з лінійною щільністю $\gamma = \varphi^2 - 1$.
26. Знайти масу кривої $r = 10 \cos \varphi$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ з лінійною щільністю $\gamma = \operatorname{tg}^2 \varphi$.
27. Знайти масу кривої $r = 1 + \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ з лінійною щільністю $\gamma = \cos \varphi$.
28. Знайти масу кривої $r = 7 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ з лінійною щільністю $\gamma = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\sin \varphi}}$.
29. Знайти масу кривої $r = 2e^{\frac{-\varphi}{2}}$, $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ з лінійною щільністю $\gamma = \sqrt{3}\varphi$.
30. Знайти масу кривої $r = 11 \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 1$ з лінійною щільністю $\gamma = \operatorname{arctg} \varphi$.

Завдання 6. Обчислити поверхневий інтеграл I роду по поверхні S , де S – частина площини (p) , відсічена координатними площинами.

1. $\iint_S (2x + 3y + 2z) ds$, $(p): x + 3y + z = 3$.
2. $\iint_S (2 + y - 7x + 9z) ds$, $(p): 2x - y - 2z = -2$.
3. $\iint_S (6x + y + 4z) ds$, $(p): 3x + 3y + z = 3$.
4. $\iint_S (x + 2y + 3z) ds$, $(p): x + y + z = 2$.

5. $\iint_S (3x - 2y + 6z) ds, \quad (p): \quad 2x + y + 2z = 2.$
6. $\iint_S (2x + 5y - z) ds, \quad (p): \quad x + 2y + z = 2.$
7. $\iint_S (5x - 8y - z) ds, \quad (p): \quad 2x - 3y + z = 6.$
8. $\iint_S (3y - x - z) ds, \quad (p): \quad x - y + z = 2.$
9. $\iint_S (3y - 2x - 2z) ds, \quad (p): \quad 2x - y - 2z = -2.$
10. $\iint_S (2x - 3y + z) ds, \quad (p): \quad x + 2y + z = 2.$
11. $\iint_S (5x + y - z) ds, \quad (p): \quad x + 2y + 2z = 2.$
12. $\iint_S (3x + 2y + 2z) ds, \quad (p): \quad 3x + 2y + 2z = 6.$
13. $\iint_S (2x + 3y - z) ds, \quad (p): \quad 2x + y + z = 2.$
14. $\iint_S (9x + 2y + z) ds, \quad (p): \quad 2x + y + z = 4.$
15. $\iint_S (5x + 8y + 8z) ds, \quad (p): \quad x + 4y + 2z = 8.$
16. $\iint_S (4y - x + 4z) ds, \quad (p): \quad x - 2y + 2z = 2.$
17. $\iint_S (7x + y + 2z) ds, \quad (p): \quad 3x - 2y + 2z = 6.$
18. $\iint_S (2x + 3y + z) ds, \quad (p): \quad 2x + 3y + z = 6.$
19. $\iint_S (4x - y + z) ds, \quad (p): \quad x - y + z = 2.$
20. $\iint_S (6x - y + 8z) ds, \quad (p): \quad x + y + 2z = 2.$
21. $\iint_S (4x - 4y - z) ds, \quad (p): \quad x + 2y + 2z = 4.$
22. $\iint_S (2x + 5y + z) ds, \quad (p): \quad x + y + 2z = 2.$
23. $\iint_S (4x - y + 4z) ds, \quad (p): \quad 2x + 2y + z = 4.$
24. $\iint_S (5x + 2y + 2z) ds, \quad (p): \quad x + 2y + z = 2.$
25. $\iint_S (2x + 5y + 10z) ds, \quad (p): \quad 2x + y + 3z = 6.$
26. $\iint_S (2x + 15y + z) ds, \quad (p): \quad x + 2y + 2z = 2.$

27. $\iint_S (3x + 10y - z) ds, \quad (p): \quad x + 3y + 2z = 6.$
28. $\iint_S (2x + 3y + z) ds, \quad (p): \quad 2x + 2y + z = 2.$
29. $\iint_S (5x - y + 5z) ds, \quad (p): \quad 3x + 2y + z = 6.$
30. $\iint_S (x + 3y + 2z) ds, \quad (p): \quad 2x + y + 2z = 2.$

Завдання 7. Обчислити поверхневий інтеграл II роду.

1. $\iint_S (y^2 + z^2) dy dz$, де S – частина поверхні параболоїда $x = 9 - y^2 - z^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом i), відсічена площиною $x = 0$.
2. $\iint_S z^2 dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні еліпсоїда $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.
3. $\iint_S z dx dy + y dx dz + z dy dz$, де S – зовнішня сторона поверхні куба, обмежена площинами $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1$.
4. $\iint_S (z + 1) dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.
5. $\iint_S yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$, де S – верхня сторона площини $x + y + z = 4$, відсічена координатними площинами.
6. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$.
7. $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
8. $\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, де S – верхня частина площини $x + y + z = 1$, відсічена координатними площинами.
9. $\iint_S yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, де S – зовнішня поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 1$, відсічена площинами $z = 0, \quad z = 5$.
10. $\iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом k), яка вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 1$.
11. $\iint_S (x^2 + y^2) z dx dy$, де S – зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

12. $\iint_S x^2 dydz + z^2 dx dy$, де S – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом k), яка розміщена між площинами $z = 0$, $z = 1$.
13. $\iint_S (2y^2 - z) dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом k), відсічена площиною $z = 2$.
14. $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, де S – частина поверхні гіперболоїда $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом k), відсічена площинами $z = 0$, $z = \sqrt{3}$.
15. $\iint_S xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
16. $\iint_S x^2 dy dz + z dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом k), відсічена площиною $z = 4$.
17. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz - z dx dy$, де S – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом k), відсічена площинами $z = 0$, $z = 3$.
18. $\iint_S x^2 dy dz - z^2 dx dz + z dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $z = 3 - x^2 - y^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом k), відсічена площиною $z = 0$.
19. $\iint_S yz dy dz - x^2 dx dz - y^2 dx dy$, де S – частина поверхні конуса $y^2 = x^2 + z^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом j), відсічена площинами $y = 0$, $y = 1$.
20. $\iint_S x^2 dy dz + 2y^2 dx dz - z dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом k), відсічена площиною $z = 1$.
21. $\iint_S 2x dy dz + (1 - z) dx dy$, де S – внутрішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 4$, відсічена площинами $z = 0$, $z = 1$.
22. $\iint_S 2x dy dz - y dx dz + z dx dy$, де S – зовнішня сторона замкненої поверхні, яка утворена параболоїдом $3z = x^2 + y^2$ і верхньою частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. $\iint_S 4x dydz + 2y dx dz - z dx dy$, де S – зовнішня сторона поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

24. $\iint_S (x + y) dydz + (y + z) dx dy$, де S – внутрішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, відсічена площинами $z = 0$, $z = 2$.

25. $\iint_S 3x dydz - y dx dz - z dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $9 - z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом k), відсічена площиною $z = 0$.

26. $\iint_S (y - x) dydz + (z - y) dx dz + (x - z) dx dy$, де S – внутрішня сторона замкненої поверхні, утворена конусом $x^2 = y^2 + z^2$ і площиною $x = 1$.

27. $\iint_S 3x^2 dydz - y^2 dx dz - z dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $1 - z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом k).

28. $\iint_S (1 + 2x^2) dydz + y^2 dx dz + z dx dy$, де S – частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом k), відсічена площинами $z = 0$, $z = 4$.

29. $\iint_S x^2 dydz + z^2 dx dz + y dx dy$, де S – частина поверхні параболоїда $4 - z = x^2 + y^2$ (її нормальний вектор n утворює гострий кут з ортом k), відсічена площиною $z = 0$.

30. $\iint_S (y^2 + z^2) dydz - y^2 dx dz + 2yz^2 dx dy$, де S – частина поверхні конуса $y^2 = x^2 + z^2$ (її нормальний вектор n утворює тупий кут з ортом j), відсічена площинами $y = 0$, $y = 1$.

Завдання 8. Дано векторне поле $\vec{A} = a_1 x \vec{i} + b_1 y \vec{j} + c_1 z \vec{k}$. Знайти потік векторного поля через замкнену поверхню, утворену площиною $F : a_2 x + b_2 y + c_2 z = d$ і координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, двома способами:

1) використав означення потоку;

2) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

Числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, d$ взяти із таблиці 1 відповідно до варіанту.

Таблица 1.

№ n/n	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	d
1	1	3	-2	1	3	4	12
2	4	-1	3	2	3	1	6
3	2	1	4	4	2	8	8
4	5	-2	3	3	4	2	12
5	6	4	-3	5	2	1	10
6	2	1	4	6	3	1	6
7	1	3	6	2	4	6	12
8	-3	2	1	4	3	2	12
9	4	-1	3	1	2	4	4
10	2	4	-3	2	1	3	6
11	6	2	-2	9	3	1	9
12	4	3	5	8	2	1	16
13	2	4	-1	4	3	4	12
14	3	4	4	1	5	2	10
15	-3	2	5	2	4	3	12
16	3	2	1	6	2	1	6
17	4	3	2	8	4	1	8
18	5	2	3	3	9	1	9
19	3	1	4	2	4	4	8
20	4	-2	5	3	2	1	6
21	4	-1	3	2	3	1	6
22	1	3	-2	4	3	2	12
23	4	-1	3	1	2	4	4
24	2	1	4	2	1	3	6
25	5	-2	3	9	3	1	9
26	6	4	-3	8	2	1	16
27	2	1	4	4	3	4	12
28	1	3	6	1	5	2	10
29	-3	2	1	2	4	3	12
30	4	-1	3	6	2	1	6

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.

Завдання 1. Обчислити криволінійний інтеграл I роду.

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl, \text{ де } l - \text{ дуга кривої}$$

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

За формулою (1.5)

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

$$x^2 = a^2(\cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t),$$

$$y^2 = a^2(\sin^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t),$$

$$x'_t = a^2(-\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t \rightarrow x'^2_t = a^2 \cos^2 t, \text{ тоді}$$

$$y'_t = a^2(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t \rightarrow y'^2_t = a^2 \sin^2 t$$

$$\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl = a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t} \times$$

$$\times \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} d(1 + t^2) = \frac{a^2}{3} (1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{3} \left[(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

Завдання 2. Обчислити криволінійний інтеграл II роду.

$$\int_L y dx - (y + x^2) dy, \text{ де } L - \text{ дуга параболи } y = 2x - x^2, \text{ яка розміщена над}$$

віссю Oх і пробігаючи за ходом годинникової стрілки.

Обчислимо даний криволінійний інтеграл за формулою (1.16):

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx.$$

Спочатку знайдемо межі інтегрування. Для цього знайдемо точки перетину параболи з віссю Oх: $2x - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$, тоді

$$\int_L y dx - (y + x^2) dy = \int_0^2 (2x - x^2) dx - \int_0^2 (2x - x^2 + x^2)(2 - 2x) dx =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = (x^3 - x^2) \Big|_0^2 = 4.$$

- Завдання 3.** Фігура D обмежена даними лініями: $y = -x$, $y = x^6$. Треба:
- 1) обчислити площу D двома способами: подвійним інтегралом і криволінійним інтегралом;
 - 2) знайти координати центру мас фігури D ;
 - 3) обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури D навколо осі OX двома способами: визначеним інтегралом та за теоремою Гульдіна.

Площу S фігури D (рис. 1) обчислимо за формулою $S = \iint_D dx dy$.

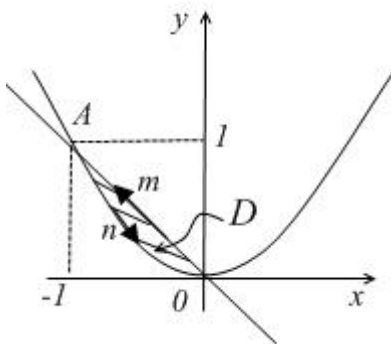


Рис. 1

У нас

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-1}^0 dx \int_{x^6}^{-x} dy = \int_{-1}^0 (x - x^6) dx = \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14}.$$

Криволінійним інтегралом площу S фігури D обчислимо за формулою

$$S = \oint_L x dy. \text{ У нас } S = \oint_L x dy = \int_{OmA} x dy + \int_{AnO} x dy = \int_0^1 (-y) dy + \int_{-1}^0 x 6x^5 dx =$$

$$= \left(-\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \frac{6x^7}{7} \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} + \frac{6}{7} = \frac{-7+12}{14} = \frac{5}{14}.$$

Координати центра мас обчислимо за формулами

$$X_c = \frac{\iint_D x ds}{S}, \quad Y_c = \frac{\iint_D y ds}{S}. \text{ Будемо мати:}$$

$$\iint_D x ds = \int_{-1}^0 x dx \int_{x^6}^{-x} dy = \int_{-1}^0 x(-x - x^6) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^8}{8} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = -\frac{5}{24}.$$

$$\iint_D y ds = \int_{-1}^0 dx \int_{x^6}^{-x} y dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x^2 - x^{12}) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{13}}{13} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{5}{39}.$$

$$X_c = \frac{-5 \cdot 14}{24 \cdot 5} = -\frac{7}{12}, \quad Y_c = \frac{5 \cdot 14}{39 \cdot 5} = \frac{14}{39}.$$

Об'єм тіла обертання обчислимо за формулою:

$$V = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

$$\text{У нас } V = \pi \int_{-1}^0 (x^2 - x^{12}) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{13}}{13} \right) \Big|_{-1}^0 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) = \frac{10\pi}{39}.$$

За теоремою Гульдіна об'єм тіла обертання $V = S \cdot 2\pi \cdot Y_c$. У нас

$$V = \frac{5}{14} 2\pi \frac{14}{39} = \frac{10\pi}{39}.$$

Завдання 4. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії $L: x^2 + y^2 = 4, (y \geq 0)$ від точки $A(2; 0)$ до точки $B(-2; 0)$. Зробити малюнок.

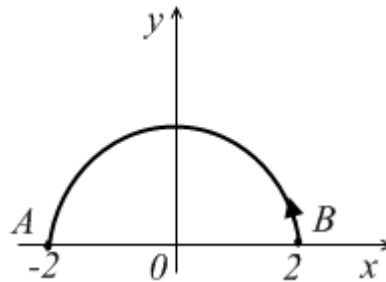


Рис. 2

Робота A сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки A до точки B (рис.) обчислюється за формулою:

$$A = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

У нас $P = x - y, Q \equiv 1$. Використаємо параметричні рівняння дуги кола $AB: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$. Тоді робота

$$\begin{aligned} A &= \int_{AB} (x - y)dx + dy = \int_0^\pi (2 \cos t - 2 \sin t)(-2 \sin t)dt + 2 \cos t dt = \\ &= \int_0^\pi (-4 \sin t \cos t + 4 \sin^2 t + 2 \cos t) dt = -4 \int_0^\pi \sin t d(\sin t) + 2 \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt + 2 \sin t \Big|_0^\pi = \\ &= -2 \sin^2 t \Big|_0^\pi + 2 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\pi + 2 \sin t \Big|_0^\pi = -2(\sin^2 \pi - \sin^2 0) + \\ &\quad + 2 \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) + 2(\sin \pi - \sin 0) = 2\pi. \end{aligned}$$

Завдання 5. Знайти масу кардіоїди $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ з лінійною щільністю $\gamma = 2\sqrt{r}$.

Масу обчислимо за формулою (1.9) $m = \int_L \gamma(x, y) dl$,

де $dl = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$.

Оскільки

$r^2 = a^2(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi)$, $r' = -a \sin \varphi$, $r'^2 = a^2 \sin^2 \varphi$, то

$$\begin{aligned} m &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{a(1 + \cos \varphi)} \cdot \sqrt{a^2(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi = \\ &= 2a\sqrt{a} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos \varphi} \cdot \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 2a\sqrt{2a} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = \\ &= 2a\sqrt{2a} (\varphi + \sin \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi a\sqrt{2a}. \end{aligned}$$

Завдання 6. Обчислити поверхневий інтеграл I роду по поверхні S , де S – частина площини (p) , відсічена координатними площинами.

$$\iint_S (2x - 3y + z) ds, \quad (p): \quad x + y + 2z = 2.$$

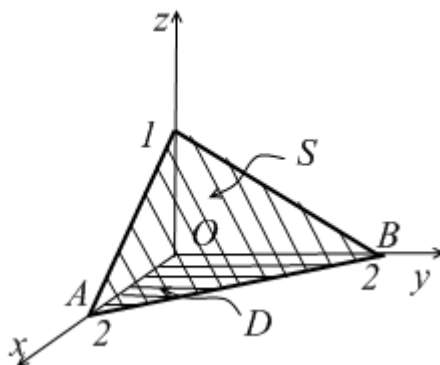


Рис. 3

Із рівняння площини знаходимо:

$$z = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}, \quad z'_x = -\frac{1}{2}, \quad z'_y = -\frac{1}{2}.$$

За формулою (2.3):

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y)} dx dy$$

Зводимо обчислення поверхневого інтеграла I роду до обчислення подвійного інтеграла по області D , де D – трикутник AOB (рис. 3) – проекція поверхні S на площину xOy . Тоді

$$\begin{aligned}
\iint_S (2x - 3y + z) ds &= \iint_D (2x - 3y + 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2}) \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} dx dy = \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \iint_D (\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}y + 1) dx dy = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}y + 1) dy = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^2 (\frac{3}{2}xy - \frac{7}{4}y^2 + y) \Big|_0^{2-x} = \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^2 \left[\frac{3}{2}x(2-x) - \frac{7}{4}(4-4x+x^2) + (2-x) \right] dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^2 \left(9x - \frac{13}{4}x^2 - 5 \right) dx = \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{12}x^3 - 5x \right) \Big|_0^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} (18 - \frac{26}{3} - 10) = -\sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Завдання 7. Обчислити поверхневий інтеграл II роду.

$\iint_S x^3 dy dz$, де S – зовнішня сторона верхньої половини еліпсоїда

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{6} = 1.$$

Координатна півплощина yOz розбиває поверхню половини еліпсоїда на дві частини $x = +2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6}}$ і $x = -2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6}}$, проекція кожної із яких на півплощину yOz є область S – половина еліпса (рис. 4). Тому шуканий інтеграл можна представити у вигляді суми двох інтегралів, перед першим із яких потрібно взяти знак « + », оскільки нормаль n до цієї частини еліпсоїда утворює гострий кут з віссю Ox , а перед другим інтегралом – знак « - », оскільки нормаль n до другої частини еліпсоїда утворює з віссю Ox тупий кут (рис. 4).

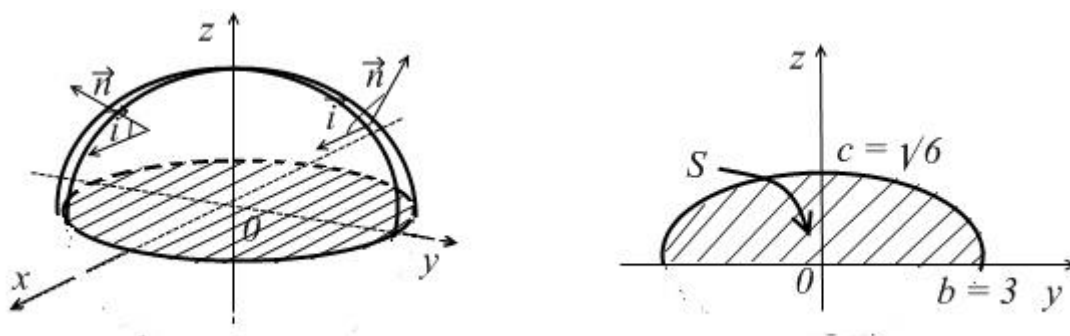


Рис. 4

Тоді

$$\begin{aligned}\iint_S x^3 dydz &= 2^3 \iint_S \left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6}\right)^{\frac{3}{2}} dydz - (-2^3) \iint_S \left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6}\right)^{\frac{3}{2}} dydz = \\ &= 16 \iint_S \left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6}\right)^{\frac{3}{2}} dydz.\end{aligned}$$

Перейдемо до узагальнених полярних координат:

$$\begin{aligned}y &= b\rho \cos \varphi = 3\rho \cos \varphi, \\ z &= c\rho \sin \varphi = \sqrt{6}\rho \sin \varphi, \\ J &= bc\rho = 3\sqrt{6}\rho.\end{aligned}\quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \text{де якобіан перетворення:}$$

$$\begin{aligned}\iint_S x^3 dydz &= 16 \iint_S \left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{6}\right)^{\frac{3}{2}} dydz = 16 \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho = \\ &= -\frac{1}{2} 48\sqrt{6}\pi \int_0^1 (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d(1 - \rho^2) = -24\sqrt{6}\pi \cdot \frac{2}{5} (1 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{48\sqrt{6}}{5} \pi.\end{aligned}$$

Завдання 8. Дано векторне поле $\vec{A} = 2xi - yj + zk$. Знайти потік векторного поля через замкнену поверхню, утворену площиною $F: 2x + 3y + z = 6$ і координатними площинами $x = 0, y = 0, z = 0$, двома способами:

- 1) використав означення потоку;
- 2) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

1. Потік векторного поля $\vec{A}$ через поверхню S (рис. 5) в бік, який визначається одиничним вектором нормалі $n = \cos \alpha \cdot i + \cos \beta \cdot j + \cos \gamma \cdot z$ до поверхні S – це поверхневий інтеграл

$$\Pi = \iint_S \vec{A} n ds = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

де $\vec{A}n$ - скалярний добуток вектора поля і одиничного вектора обраного напрямку нормалі.

Оскільки поверхня замкнена, додатним напрямком нормалі до поверхні вважають зовнішню нормаль.

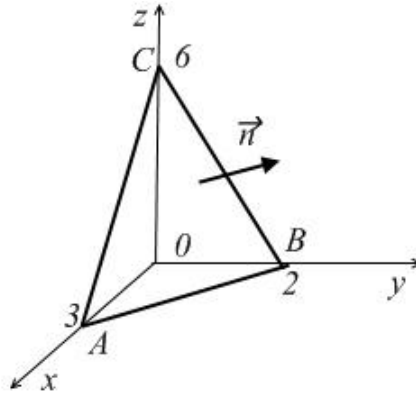


Рис. 5

Для даного векторного поля $P = 2x$, $Q = -y$, $R = z$. Тоді за означенням потоку, отримаємо:

$$\Pi = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S 2x dy dz - y dz dx + z dx dy = J_1 - J_2 + J_3,$$

де

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_{D_{YZ}} 2x dy dz = \iint_{D_{YZ}} (6 - 3y - z) dy dz = \int_0^2 dy \int_0^{6-3y} (6 - 3y - z) dz = \int_0^2 \left(6z - 3yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{6-3y} dy = \\ &= \int_0^2 \left(18 - 18y + \frac{9}{2}y^2 \right) dy = \left(18y - 9y^2 + \frac{9y^3}{6} \right) \Big|_0^2 = 36 - 36 + 12 = 12. \\ J_2 &= \iint_{D_{ZX}} y dz dx = \frac{1}{3} \iint_{D_{ZX}} (6 - 2x - z) dz dx = \frac{1}{3} \int_0^6 dz \int_0^{3-z/2} (6 - 2x - z) dx = \int_0^6 \left(6x - x^2 - zx \right) \Big|_0^{3-z/2} dz = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left(9 - 3z + \frac{z^2}{4} \right) dz = \frac{1}{3} \left(9z - \frac{3z^2}{2} + \frac{z^3}{12} \right) \Big|_0^6 = \frac{1}{3} (54 - 54 + 18) = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \iint_{D_{XY}} z dx dy = \iint_{D_{XY}} (6 - 2x - 3y) dx dy = \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (6 - 2x - 3y) dy = \int_0^3 \left(6y - 2xy - \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-\frac{2}{3}x} dx = \\ &= \int_0^3 \left(6 - 4x + \frac{2x^2}{3} \right) dx = \left(6x - 2x^2 + \frac{2x^3}{9} \right) \Big|_0^3 = 18 - 18 + 6 = 6. \end{aligned}$$

Тоді,

$$\Pi = J_1 - J_2 + J_3 = 12 - 6 + 6 = 12.$$

2. Обчислимо потік за формулою Остроградського – Гаусса (2.15):

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Знайдемо

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1.$$

Оскільки інтеграл $\iiint_G dx dy dz$ дорівнює об'єму прямокутної піраміди

$ABCO$ (рис. 5), то

$$\Pi = \iiint_G (2 - 1 + 1) dx dy dz = 2 \iiint_G dx dy dz = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навч. Посібник. – К. ; Вища школа, 1993. – 648 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : т.2 – Москва: Наука, 1978. – 575 с.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3 – Москва: Наука, 1969. – 800 с.
4. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч. 3. Издательство: Минск: Высшая школа, 1991. – 288 с.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. – 528 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учебное пособие для втузов, под редакцией А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
7. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1996. – 416 с.
8. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. У двох частинах. Частина 2. І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Є. Ю. Таран. – К.: Либідь, 1992.- 256 с.
9. Шипачев В. С. Задачи по высшей математике: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1996. – 304 с.

Розуменко Анатолій Михайлович

Головченко Галина Степанівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ ТА
САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ПО ТЕМІ «КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ»

для студентів денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей

Суми, Сумський національний аграрний університет, вул. Кірова, 160

Підписано до друку: _____ 2011 р. Формат А5. Гарнітура Times
New Roman. Тираж: 50 примірників. Замовл. _____ . Ум. друк.
арк. 2,4.
