

**А. В. НЕСВІДОМІН**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну  
Національний університет біоресурсів і природокористування України  
ORCID: 0000-0002-9227-4652

**С. Ф. ПИЛИПАКА**

завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну  
Національний університет біоресурсів і природокористування України  
ORCID: 0000-0002-1496-4615

**І. Ю. ГРИЩЕНКО**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну  
Національний університет біоресурсів і природокористування України  
ORCID: 0000-0002-1000-9805

**Т. М. ВОЛІНА**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну  
Національний університет біоресурсів і природокористування України  
ORCID: 0000-0001-8610-2208

**В. М. БАБКА**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну  
Національний університет біоресурсів і природокористування України  
ORCID: 0000-0003-4971-4285

**ЗВ'ЯЗОК МІЖ ГІПЕРБОЛОЮ І ЕЛІПСОМ НА ПОВЕРХНІ КУЛІ**

*У плоских і сферичних кривих є спільні властивості, які використовуються на практиці. Плоскі криві можуть як завгодно ковзати у площині, здійснюючи в ній як поступальний, так і обертальний рухи. Аналогічні рухи можуть здійснювати сферичні криві, переміщуючись з одного її положення в інше. Наприклад, аналогом кола у площині є теж коло на поверхні сфери. Обидві криві є плоскими. Аналогом еліпса у площині є сферичний еліпс, який є просторовою кривою, але графічні способи побудови є спільними як для площини, так і для поверхні кулі. Ці спільні геометричні властивості використовуються при створенні сферичних механізмів, які є аналогами плоских. Наприклад, пара кіл, які обертаються навколо нерухомих центрів і одночасно ковзають без ковзання одне по одному, є основою проектування центроїд для зубчастих циліндричних передач між паралельними осями. Такі ж самі кола на поверхні кулі є основою проектування центроїд для зубчастих конічних передач між осями, які перетинаються у центрі сфери.*

*В основі утворення сферичних кривих лежать графічні побудови, аналогічні для кривих на площині. Наприклад, еліпс на площині утворюється як геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок є сталою. Сферичний еліпс утворюється аналогічно з урахуванням того, що відстані вимірюються на поверхні сфери дугами великих кіл. Радіус сфери зручно приймати рівним одиниці, тоді відстань на її поверхні вимірюється кутами. Різниця між еліпсом і гіперболою полягає в тому, що у першому випадку сталою є сума відстаней, а у другому – різниця. Задані точки називаються фокусами кривих. Якщо фокуси для еліпса і гіперболи є спільними, то такі криві називаються співфокусними. Задавши сталу відстань між фокусами і змінюючи суму або різницю відстаней до них від поточної точки кривої, можна отримати сім'ю співфокусних еліпсів і гіпербол. Вони утворюють ортогональну сітку як на площині, так і на сфері. Особливістю є те, що на сфері аналог плоскої гіперболи є сферичним еліпсом, причому двом віткам гіперболи на площині відповідають два еліпси на поверхні кулі.*

*В статті показано взаємозв'язок між гіперболою і еліпсом на поверхні кулі. Особливістю цього взаємозв'язку є те, що аналогом гіперболи на кулі є сферичний еліпс. Виведено параметричні рівняння співфокусних сферичних гіпербол і еліпсів. Побудовано на поверхні кулі ортогональні сітки, утворені співфокусними сферичними еліпсами і гіперболами.*

**Ключові слова:** плоска крива, сферичні аналоги, еліпс, гіпербола, співфокусні криві, внутрішнє рівняння.

A. V. NESVIDOMIN

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Descriptive Geometry,  
Computer Graphics and Design  
National University of Life and Environmental Science of Ukraine  
ORCID: 0000-0002-9227-4652

S. F. PILYPAKA

Head of the Department of Descriptive Geometry,  
Computer Graphics and Design  
National University of Life and Environmental Science of Ukraine  
ORCID: 0000-0002-1496-4615

I. YU. HRYSHCHENKO

Candidate Of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Descriptive Geometry,  
Computer Graphics and Design  
National University of Life and Environmental Science of Ukraine  
ORCID: 0000-0002-1000-9805

T. M. VOLINA

Candidate Of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Descriptive Geometry,  
Computer Graphics and Design  
National University of Life and Environmental Science of Ukraine  
ORCID: 0000-0001-8610-2208

V. M. BABKA

Candidate Of Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor at the Department of Descriptive Geometry,  
Computer Graphics and Design  
National University of Life and Environmental Science of Ukraine  
ORCID: 0000-0003-4971-4285

## RELATION BETWEEN A HYPERBOLA AND AN ELLIPSE ON THE SURFACE OF A SPHERE

*Plane and spherical curves have common properties that are used in practice. Plane curves can slide as desired in the plane, making both translational and rotational movements in it. Similar movements can be made by spherical curves, moving from one position to another. For example, an analogue of a circle in a plane is also a circle on the surface of a sphere. Both curves are flat. An analogue of an ellipse in a plane is a spherical ellipse, which is a spatial curve, but the graphical methods of construction are common to both the plane and the surface of the sphere. These common geometric properties are used in the creation of spherical mechanisms, which are analogues of flat ones. For example, a pair of circles revolving around fixed centers and simultaneously sliding without slipping on each other is the basis for designing centroids for spur gears between parallel axes. The same circles on the surface of the sphere are the basis for designing centroids for bevel gears between axes that intersect at the center of the sphere.*

*The formation of spherical curves is based on graphic constructions similar to curves on a plane. For example, an ellipse on a plane is formed as a locus of points, the sum of the distances from which to two given points is constant. A spherical ellipse is formed similarly, taking into account the fact that distances are measured on the surface of the sphere by arcs of great circles. It is convenient to take the radius of the sphere equal to one, then the distance on its surface is measured in angles. The difference between an ellipse and a hyperbola is that in the first case the sum of the distances is constant, and in the second – the difference. The given points are called the foci of the curves. If the foci of an ellipse and a hyperbola are common, then such curves are called confocal. By setting a constant distance between the foci and changing the sum or difference of their distances from the current point of the curve, families of confocal ellipses and hyperbolas can be obtained. They form an orthogonal grid both on the plane and on the sphere. The peculiarity is that on the sphere the analog of a plane hyperbola is a spherical ellipse, and two branches of the hyperbola on the plane correspond to two ellipses on the surface of the sphere.*

*The article shows the relations between a hyperbola and an ellipse on the surface of a sphere. The peculiarity of this relationship is that the analog of a hyperbola on a sphere is a spherical ellipse. Parametric equations of confocal spherical hyperbolas and ellipses are derived. Orthogonal grids formed by confocal spherical ellipses and hyperbolas are built on the surface of the sphere.*

**Key words:** plane curve, spherical analogues, ellipse, hyperbola, confocal curves, internal equation.

### Постановка проблеми

Побудова сферичних аналогів плоских кривих була предметом досліджень як вчених-механіків, так і геометрів. Назву «сферичний еліпс» вперше застосував у своїх працях швейцарець за походженням Л. І. Фусс. Розвитку досліджень і знаходженню сферичних аналогів відомих плоских кривих сприяв той факт, що властивості плоских кривих переходили і до їх сферичних аналогів. Це дозволяло переходити від плоских до сферичних механізмів. Відомим прикладом такого переходу є циліндрична і конічна зубчасті передачі. Якщо профілем зубця передачі у першому випадку є евольвента кола, то у другому – сферичний аналог евольвенти кола. Знаходження сферичних аналогів відомих плоских кривих сприяє подальшому розвитку сферичних механізмів.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Геометричний зв'язок між плоскими і сферичними кривими викликає певний інтерес у фахівців, які працюють в області конструювання сферичних механізмів. Їх теорію розвинув В. В. Добровольський [1]. Існує відповідність між деякими кривими на площині і на поверхні сфери. Прямий на площині відповідає велике коло на сфері. Паралельним прямим на площині відповідають великі кола, що перетинаються на сфері у полюсах. Якщо уявити сферу нескінченно великого радіуса, то точки перетину великих кіл теж прямують у нескінченність і вони перетворюються у паралельні прямі. В зв'язку із цим деякі плоскі криві, які прямують у нескінченність, або вітки таких кривих (параболи, гіперболи) на сфері є замкненими. Основою кінематики плоских механізмів є криві – траєкторії руху окремих точок. В праці [2] розглянуто сферичні аналоги відомих теорем плоскої кінематики. Атлас сферичних чотириланкових механізмів наведено в праці [3]. Питання динаміки сферичних механізмів розглянуто в праці [4]. В праці [5] описано побудову сферичних епіциклоїд при коченні рухомого конуса по нерухомому. Конструювання конічних аксоїдів з використанням сферичних еліпсів здійснено в праці [6]. В праці [7] розглянуто конструювання ізометричних сіток на поверхні кулі.

### Формулювання мети досліджень

Встановити зв'язок між сферичними еліпсом і гіперболою на поверхні кулі та побудувати співфокусні сім'ї цих кривих.

### Викладення основного матеріалу досліджень

У еліпса на площині сума відстаней від будь-якої точки на ньому до двох фіксованих точок (фокусів) є величина стала. Це визначення буде підходити і до гіперболи, якщо суму відстаней помінати на їх різницю. Для сфери одиничного радіуса відстані вимірюються кутами. Наприклад, відстань між фокусами  $F_1$  і  $F_2$  вимірюється кутом  $\theta$  (рис. 1,а). Відстані  $AF_1$  і  $AF_2$  від поточної точки  $A$  еліпса або гіперболи до їх фокусів позначимо через кути  $\beta$  і  $\varepsilon$ . Щоб знайти їх вирази, скористаємося параметричними рівняннями сфери одиничного радіуса:

$$X = \sin \varepsilon \cos \gamma; \quad Y = \sin \varepsilon \sin \gamma; \quad \cos \varepsilon, \quad (1)$$

де  $\varepsilon, \gamma$  – криволінійні координати сфери, тобто кути, що задають величину меридіана і паралелі відповідно.

Згідно рівнянь (1) координати точок  $F_1, F_2$  і  $A$  запишуться:

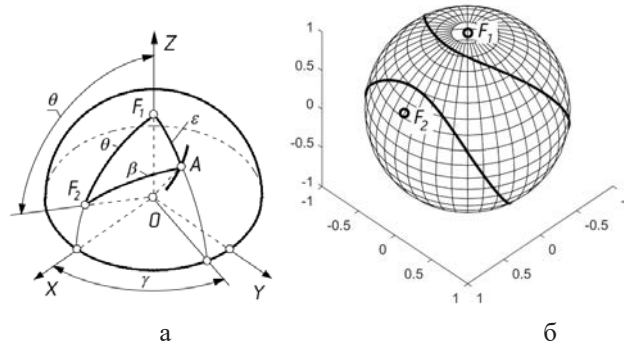
$$F_1: \{0, 0, 1\}. \quad (2)$$

$$F_2: \{\sin \theta, 0, \cos \theta\}. \quad (3)$$

$$A: \{\sin \varepsilon \cos \gamma, \sin \varepsilon \sin \gamma, \cos \varepsilon\}. \quad (4)$$

Вирази (2), (3), (4) є векторами, що виходять із початку координат  $O$  до точок  $F_1, F_2$  і  $A$ . Кутіві  $\theta$  відповідає кут між векторами  $OF_1$  і  $OF_2$ . Кутіві  $\varepsilon$  відповідає кут між векторами  $OF_1$  і  $OA$ . Кутіві  $\beta$  відповідає кут між векторами  $OF_2$  і  $OA$ . За відомою формулою визначення кутів між векторами знаходимо:

$$\beta = \text{Arc cos}(\sin \theta \sin \varepsilon \cos \gamma + \cos \theta \cos \varepsilon). \quad (5)$$



**Рис. 1. Графічні ілюстрації до складання рівнянь сферичних гіперболи і еліпса:**  
**а) при заданих фокусах і кутові  $\theta$  між ними різниця кутів  $\beta-\epsilon$  відповідає гіперболі, а їх сума  $\beta+\epsilon$  – еліпсу;**  
**б) сферична гіпербола з двома вітками у вигляді еліпсів при  $\theta=60^\circ$  і  $\varphi=30^\circ$**

Позначимо різницю кутів  $\beta$  і  $\epsilon$  через  $\varphi$ :  $\varphi=\beta-\epsilon$ . Тоді для гіперболи можна записати:

$$\varphi = \text{Arccos}(\sin \theta \sin \epsilon \cos \gamma + \cos \theta \cos \epsilon) - \epsilon. \tag{6}$$

Розв'яжемо (6) відносно  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \text{Arctg}\left(\frac{\cos \varphi - \cos \theta}{\sin \theta \cos \gamma + \sin \varphi}\right). \tag{7}$$

Для другої вітки гіперболи різниця кутів  $\beta$  і  $\epsilon$  запишеться:  $\varphi=\epsilon-\beta$ . Для цього випадку залежність  $\epsilon=\epsilon(\gamma)$  має наступний розв'язок:

$$\epsilon = \text{Arctg}\left(\frac{\cos \theta - \cos \varphi}{\sin \varphi - \sin \theta \cos \gamma}\right). \tag{8}$$

Рівняння (7) і (8) називаються внутрішніми рівняннями сферичної гіперболи у криволінійних координатах. Щоб отримати параметричні рівняння гіперболи на поверхні кулі, потрібно внутрішні рівняння (7) і (8) підставити у рівняння сфери (1). Об'єднуючи ці підстановки, знаходимо:

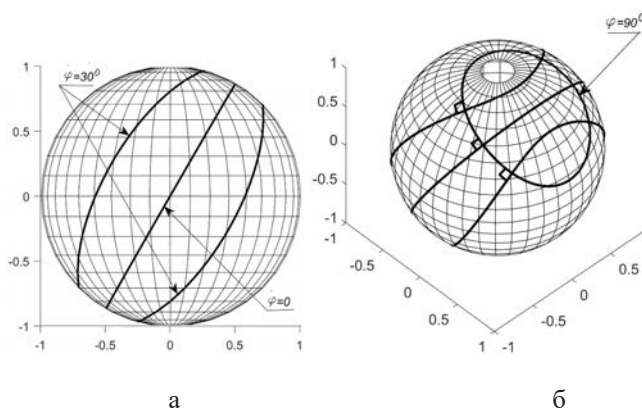
$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \theta - \cos \varphi \cos \gamma}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta \cos \gamma)^2}}; \\ y &= \frac{\cos \theta - \cos \varphi \sin \gamma}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta \cos \gamma)^2}}; \\ z &= \pm \frac{\sin \varphi - \sin \theta \cos \gamma}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta \cos \gamma)^2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Знак « $\pm$ » в останньому рівнянні (9) відповідає двом віткам гіперболи. На рис. 1,б за цими рівняннями побудовано дві вітки гіперболи при  $\theta=60^\circ$  і  $\varphi=30^\circ$ .

Знайдемо внутрішнє рівняння еліпса. Для нього має бути сталою сума  $\varphi=\beta+\epsilon$ . Звідси можна записати:

$$X = \sinh u \cos v; \quad Y = \cosh u \sin v. \tag{10}$$

Розв'язавши рівняння (10) відносно  $\epsilon$ , ми отримаємо внутрішнє рівняння еліпса, яке повністю збігається із (8). Виходить, що гіпербола і еліпс мають одне і те ж рівняння. Сферичними гіперболами є сферичні еліпси. На рис. 2,а показано ті ж самі гіперболи (еліпси), що і на рис. 1,б. Зображення повернуто так, що вісь  $OY$  проєкціюється в точку.



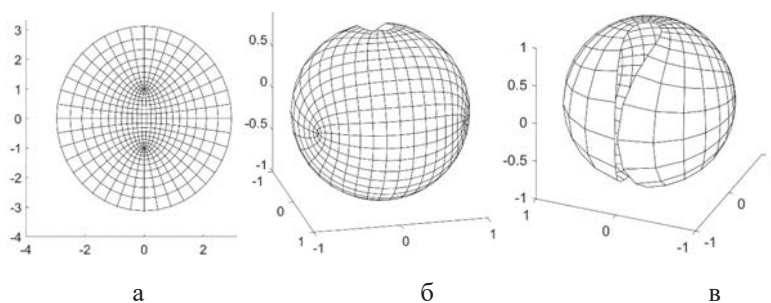
**Рис. 2. Сферичні гіпербола і еліпс при  $\theta=60^\circ$  і різних значеннях кута  $\varphi$ : а) сферичні гіперболи; б) сферичні гіперболи і сферичний еліпс**

При  $\varphi < \theta$  рівняння (9) описують сферичну гіперболу, у якої вітки є сферичними еліпсами. При  $\varphi = \theta$  сферична гіпербола перетворюється в коло великого діаметра (рис. 2,а). Це коло розташоване у площині, яка є площиною симетрії для віток гіперболи, тобто для еліпсів. При  $\varphi > \theta$  рівняння (9) описують сферичний еліпс, який є співфокусний із сферичною гіперболою і перетинає її вітки під прямим кутом (рис. 2,б). При  $\varphi = \theta$  еліпс перетворюється у дугу великого кола, яка сполучає фокуси.

Відомо, що співфокусні еліпси і гіперболи на площині утворюють ортогональну сітку. Вона описується наступними параметричними рівняннями, де  $u$  і  $v$  – незалежні змінні:

$$X = \sinh u \cos v; \quad Y = \cosh u \sin v. \tag{11}$$

Сітка за рівняннями (11) побудована на рис. 3,а. Окрім того, що вона ортогональна, вона ще є ізометричною, тобто її нескінченно малий елемент (чарунка) є квадратом. В праці [7] описано спосіб перенесення плоских ізометричних сіток на поверхню кулі з умовою, що і на поверхні кулі вони залишаються ізометричними. Скориставшись ним, було нанесено плоску сітку (11) на поверхню кулі. Однак при цьому сітка не покриває всю поверхню кулі у замкненому вигляді. Це видно із рис. 3,б (вигляд зі сторони, де видно фокуси) і 3,в (вигляд із протилежної сторони).



**Рис. 3. Плоська і сферична ізометричні сітки: а) плоска сітка, яка утворена сім'ями співфокусних гіпербол і еліпсів; б), в) сферична сітка із різних точок спостереження**

Для кращої наочності візьмемо фокуси  $F_1$  і  $F_2$  на екваторі симетрично від його нульового значення. Для цього рівняння сфери запишемо таким чином, щоб кут  $\varepsilon$  відраховувався не від полюса, а від екватора. В такому випадку поточне значення точки  $A$  гіперболи (або еліпса) матиме наступні координати:

$$A: \{ \cos \varepsilon \cos \gamma, \cos \varepsilon \sin \gamma, \sin \varepsilon \}. \tag{12}$$

Координати фокусів запишуться:

$$F_1: \{ \cos \theta/2, -\sin \theta/2, 0 \}. \tag{13}$$

$$F_2: \{ \cos \theta/2, \sin \theta/2, 0 \}. \tag{14}$$

Відстані від поточної точки  $A$  гіперболи (або еліпса) до фокусів  $F_1$  і  $F_2$  відповідно запишуться:

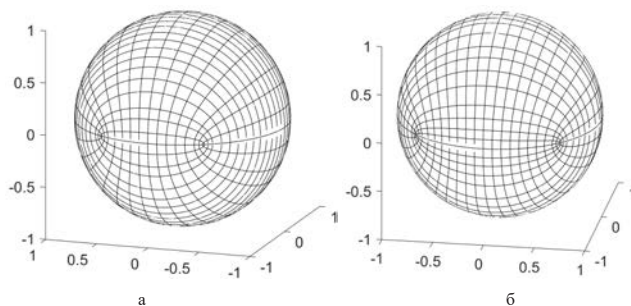
$$AF_1 = \text{Arccos}[\cos(\gamma - \theta/2)\cos \varepsilon]; \quad AF_2 = \text{Arccos}[\cos(\gamma + \theta/2)\cos \varepsilon]. \tag{15}$$

Різниця відстаней (15) як і їх сума є величина стала. З цієї умови знаходимо внутрішнє рівняння  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ :



$$\varepsilon = \text{Arccos}\left(\frac{\sin \varphi}{1 + \cos 2\gamma \cos \theta - (\cos 2\gamma + \cos \theta) \cos \varphi}\right). \tag{16}$$

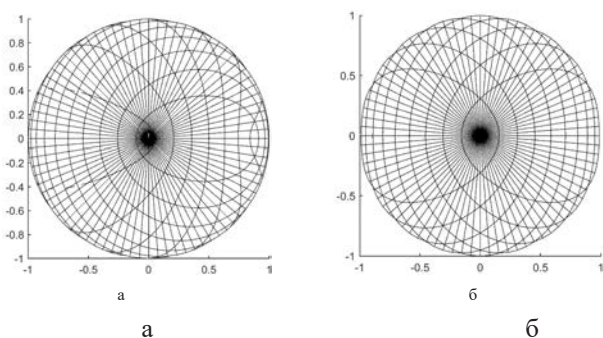
Підстановка рівняння (16) у вирази (12), які є, по суті, рівняннями сфери одиничного радіуса дасть параметричні рівняння сферичної гіперболи при  $\varphi < \theta$  і сферичного еліпса при  $\varphi > \theta$ . При одному і тому ж значенні  $\theta$  (тобто при заданій відстані між фокусами) можна побудувати дві сім'ї співфокусних еліпсів. Одна сім'я еліпсів при різних значеннях  $\varphi$ , але при умові, що  $\varphi < \theta$ , є сім'єю сферичних гіпербол, а інша сім'я при  $\varphi > \theta$  – сім'єю сферичних еліпсів. На рис. 4 сім'ї співфокусних кривих побудовані при різних значеннях відстані  $\theta$  між фокусами.



**Рис. 4. Сферичні співфокусні гіперболи і еліпси:**  
**а) при  $\theta = \pi/3$ ;                      б) при  $\theta = \pi/2$**

На рис. 4 побудовані сім'ї співфокусних еліпсів, тому що для сфери гіпербола теж є еліпсом. Дві сім'ї перетинаються під прямим кутом, однак побудовані криві, хоч і утворюють ортогональну сітку, однак сіткою в математичному сенсі вона не є. Сітка утворюється із координатних ліній при двох незалежних змінних у рівняннях (наприклад, плоска сітка (11)). Криві на рис. 4 побудовані при одній незалежній змінній  $\gamma$  і дискретних значеннях кута  $\varphi$ . Побудовані сітки на рис. 4 відрізняються від сітки на рис. 3,б,в. Вони повністю покривають кулю, причому між півкулями існує симетрія. На екваторі розташовані чотири фокуси. Для випадку  $\theta = \pi/2$  (рис. 4,б) фокуси рівномірно розподілені на екваторі. Сітки, зображені на рис. 4, з протилежної сторони мають такий же вигляд.

Знайдемо параметричні рівняння сітки у функції двох незалежних змінних, тобто рівняння поверхні, для якої лінії сітки будуть координатними лініями. Можна у рівняннях (9) величину  $\varphi$  зробити змінною. В такому випадку рівняння (9) стануть залежними від двох змінних –  $\gamma$  і  $\varphi$ , тобто вони стануть рівняннями сфери. При зміні при  $\varphi$  в межах  $\varphi = 0 \dots 2\pi$  сфера буде покрита співфокусними еліпсами. Для  $\varphi < \theta$  це будуть еліпси однієї сім'ї, а для  $\varphi > \theta$  – другої сім'ї. Сітка в такому випадку матиме вигляд, як показано на рис. 5.



**Рис. 5. Сітка із співфокусних сферичних еліпсів (вигляд зверху):**  
**а) при  $\theta = \pi/3$ ;                      б) при  $\theta = \pi/2$**

На рис. 5 видно співфокусні еліпси, однак крім них зайві лінії. Ці зайві лінії є координатними лініями, що виникають при зміні іншої змінної –  $\gamma$ . Щоб їх позбутися, потрібно перейти до іншої змінної причому такої, щоб її координатні лінії були перпендикулярними до сімей еліпсів. Такий перехід здійснюється засобами диференціальної геометрії. Для цього потрібно знайти коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні (9) за умови, що  $\gamma$  і  $\varphi$  є незалежними змінними. Для їх знаходження застосовувався процесор символічної математики програмного продукту “Mathematica”. Вирази частинних похідних, через які знаходили коефіцієнти, не наводимо із-за їх громіздкості. Наводимо готовий результат отриманих коефіцієнтів  $E, F, G$ :

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \gamma}\right)^2 = \frac{3(\cos \theta - \cos \varphi)^2(1 - \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma)}{(7 + \cos 2\theta - 8 \cos \theta \cos \varphi + 2 \cos 2\gamma \sin^2 \theta - 8 \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma)^2};$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial Z}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{6 \sin \theta \sin \gamma (\cos \varphi - \cos \theta)(1 - \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma)}{(7 + \cos 2\theta - 8 \cos \theta \cos \varphi + 2 \cos 2\gamma \sin^2 \theta - 8 \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma)^2}; \quad (17)$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{(1 - \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi \cos \gamma)^2}{[(\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi - \sin \theta \cos \gamma)^2]}.$$

Щоб побудувати криву, перпендикулярну до сім’ї співфокусних еліпсів, потрібно розв’язати диференціальне рівняння:

$$Ed\gamma + Fd\varphi = 0. \quad (18)$$

Після підстановки коефіцієнтів (17) у (18) отримаємо:

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{\sin \theta \sin \gamma}{2(\cos \theta - \cos \varphi)}. \quad (19)$$

З допомогою програмного продукту “Mathematica” знаходимо розв’язок диференціального рівняння (19):

$$\gamma = 2 \operatorname{Arctg} \left( e^{2\alpha \sin \theta} \sqrt{\sin \frac{\theta - \varphi}{2} \operatorname{csc} \frac{\theta + \varphi}{2}} \right), \quad (20)$$

де  $\alpha$  – постійна інтегрування. Якщо підставити вираз (20) у рівняння (9), то для конкретного значення  $\alpha$  рівняння (9) опишуть криву, перпендикулярну до співфокусних еліпсів. Якщо параметр  $\alpha$  прийняти за нову незалежну змінну замість  $\gamma$ , то рівняння (9) опишуть поверхню кулі, віднесену до ортогональних координатних ліній, якими є співфокусні еліпси. На рис. 5 побудовані сфери при незалежних змінних  $\gamma$  і  $\varphi$ , а на рис. 6 – ті ж самі сфери при незалежних змінних  $\alpha$  і  $\varphi$ , де перехід від змінної  $\gamma$  до змінної  $\alpha$  відбувся через вираз (20).

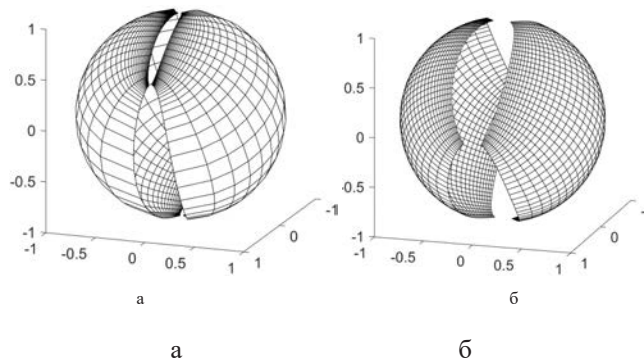


Рис. 6. Сітка із співфокусних взаємно ортогональних сферичних еліпсів:  
а) при  $\theta = \pi/3$ ; б) при  $\theta = \pi/2$

Як видно із рис. 6, на поверхні кулі є ділянки у вигляді незавершених еліпсів, на яких сітка відсутня. Це пояснюється тим, що в цих місцях лінії однієї сім’ї настільки загущуються, що їх не стає видно і навпаки, лінії другої сім’ї дуже розріджуються. Спроба перейти до ізометричної сітки не увінчалася успіхом.

### Висновки

Співфокусні еліпси і гіперболи на площині утворюють ортогональну сітку. Знайдено сферичні аналоги еліпса і гіперболи за принципом їх графічної побудови на площині. Як на площині, так і на сфері потрібно задати відстань між двома фокусами. Другою умовою є стала сума відстаней (для еліпса) або різниця (для гіперболи) від поточної точки кривої до фокусів. Для сфери ці відстані вимірюються кутами. Сферичний аналог еліпса подібний до еліпса на площині, а сферичним аналогом гіперболи є два сферичні еліпси, що відповідають двом віткам гіперболи на площині. Для заданої міжфокусної відстані на сфері сферичний еліпс і сферична гіпербола (а по суті два сферичних еліпси) перетинаються під прямим кутом. Змінюючи величину суми або різниці відстаней при незмінній міжфокусній відстані можна побудувати дві сім’ї сферичних еліпсів і гіпербол (які теж є еліпсами), які за аналогією на площині утворюють ортогональну сітку. Виведено параметричні рівняння сфери одиничного радіуса, віднесеної до ортогональної сітки двох сімей координатних ліній. Цими сім’ями є співфокусні сферичні еліпси.

## Список використаної літератури

1. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин. Київ: Наукова думка, 2002. 662 с. Режим доступу: [https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2021/Kinitsky\\_2002\\_661.pdf](https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2021/Kinitsky_2002_661.pdf)
2. Chiang C.H. (2000). Kinematics of Spherical Mechanisms. Published by Krieger Publishing Company United States, Режим доступу: <https://www.abebooks.com/9781575241555/Kinematics-Spherical-Mechanisms-Chiang-1575241552/plp>
3. Mullineux G Atlas of spherical four-bar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, Volume 46, Issue 11, November 2011. Pages 1811–1823. Режим доступу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X11001121>
4. Dooley, J. R., and McCarthy, J. M., 1992, Dynamics of Open and Closed Chain Spherical Mechanisms Using Quaternion Coordinated. Proceedings of the 22nd Biennial Mechanisms Conference, 1992, DE-Vol. 47, pp. 167–172.
5. Пилипака С.Ф., Несвідомін А.В. Формоутворення сферичних епіциклоїд при обкочуванні рухомого конуса по нерухомому. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2023. № 2 (85). С. 65–70. Режим доступу: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/article/view/243](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/article/view/243)
6. Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O. Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses. *Archives of Materials Science and Engineering* *this link is disabled*. 2022, 113(1), pp. 13–18. Режим доступу: <https://www.sciencegate.app/document/10.5604/01.3001.0015.6967>
7. Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Несвідоміна О. В. Конструювання ізометричних сіток на поверхні кулі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2018. Вип. 94. С. 82–87. Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig\\_2018\\_94\\_16](http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig_2018_94_16)

## References

1. Kinytskyi, Ya.T. (2002). *Teoriia mekhanizmiv i mashyn* [Theory of mechanisms and machines]. Kyiv: Naukova dumka, 662 (in Ukrainian).
2. Chiang, C.H. (2000). *Kinematics of Spherical Mechanisms*. Published by Krieger Publishing Company United States, Available at: <https://www.abebooks.com/9781575241555/Kinematics-Spherical-Mechanisms-Chiang-1575241552/plp>
3. Mullineux, G (2011). Atlas of spherical four-bar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, Issue 11, pp. 1811–1823. .: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X11001121>
4. Dooley, J. R., and McCarthy, J. M. (1992). Dynamics of Open and Closed Chain Spherical Mechanisms Using Quaternion Coordinated. Proceedings of the 22nd Biennial Mechanisms Conference, DE-Vol. 47, pp. 167–172.
5. Pylypaka, S.F., Nesvidomin, A.V. (2023). Formoutvorennia sferychnykh epitsykloid pry obkochuvanni rukhomoho konusa po nerukhomomu [Formation of spherical epicycloids when rolling a moving cone on a stationary one]. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu.*, № 2 (85), pp. 65–70. Available at: [https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk\\_kntu/article/view/243](https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/article/view/243)
6. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2022). Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses. *Archives of Materials Science and Engineering* *this link is disabled*, 113(1), pp. 13–18. Available at: <https://www.sciencegate.app/document/10.5604/01.3001.0015.6967>
7. Pylypaka, S. F., Hryshchenko, I. Yu., Nesvidomina, O. V. (2018). Konstruiuvannia izometrychnykh sitok na poverkhni kuli [Construction of isometric grids on the surface of the sphere]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*, vyp. 94, pp. 82-87. Available at: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig\\_2018\\_94\\_16](http://nbuv.gov.ua/UJRN/prgeoig_2018_94_16)