

бе функции осевой бесконтактной опоры и концевой уплотнения. В результате упрощается конструкция, повышается экономичность и надежность по сравнению с системами, в которых используется разгрузочный поршень. Конструкция позволяет отказаться не только от двухступенчатых затворных концевых уплотнений, но и от выносных подшипников.

Выведенное уравнение динамики дает возможность вычислить собственные частоты осевых колебаний ротора, определить границы динамической устойчивости по основным геометрическим и режимным параметрам, построить частотные характеристики – реакции системы на заданные внешние воздействия.

Список использованной литературы:

1. Рис В.Ф. Центробежные компрессорные машины. / Рис В.Ф. – Л.: Машиностроение, 1981. – 351 с.
2. Малюшенко В.В. Энергетические насосы: Справочное пособие. / Малюшенко В.В., Михайлов А.К. – М.: Энергоиздат, 1981. – 200 с.
3. Марцинковский В.А. Насосы атомных электростанций. / Марцинковский В.А., Ворона П.Н. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
4. A.Korczak, W.Marcinkowski, Peczkis G.: Tarcza odciążająca siłę osiową w sprężarce wirnikowej. P-365432, (Polska), z 20. 02.2004.
5. Корчак А. Использование гидропаты в качестве затворно-уравновешивающего устройства ротора. / Корчак А., Печкис Г., Марцинковский В. - „Вісник СумДУ” – Суми: Вид-во СумДУ, - 2005, №1 (73), с.68-76.

Static, dynamic and flow characteristics of automatic barrier arrangement for axial forces balancing which act to the centrifugal compressor rotor are obtained on based equations of rotor axial equilibrium, rotor axial vibration and flow balance.

На основі рівнянь нерозривності руху рідини і осьових коливань ротора побудовані статичні і динамічні характеристики нової конструкції автоматичного врівноважуючого пристрою, виконуючого одночасно функції безконтактного ущільнення.

Дата надходження в редакцію: 18.04.2012. р.

Рецензент: д.т.н., професор Тарельник В.Б.

УДК 517.17

РОЗРИВНІ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ДІЙСНОЇ ЗМІННОЇ

В.Ф. Власенко, к.ф.-м.н., доцент, Сумський національний аграрний університет

А.М. Розуменко, к.ф.-м.н., доцент, Сумський національний аграрний університет

У статті наведені маловідомі факти про множину точок розриву функції $f(x)$, детально досліджені класичні розривні функції Діріхле, Рімана, Дірака та їх застосування, а також доведено існування розривних розв'язків функціональних рівнянь Коші.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Функції є основним об'єктом дослідження в математичному аналізі. Вони поділяються на розривні та нерозривні (неперервні) функції. Клас розривних функцій потребує спеціальних методів дослідження, оскільки до них незастосовні методи диференціального та інтегрального числення. Вони мають оригінальні специфічні властивості і використовуються, зокрема, для побудови контр-прикладів.

Математичний аналіз у вищих педагогічних закладах освіти вивчає в основному неперервні функції та розривні функції із скінченною або зчисленною множиною точок розриву. Майбутній учитель математики повинен знати дещо більше про розривні функції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Джерелом розривних функцій є:

1. Алгебраїчні операції над неперервними функціями. Так $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - алгебраїчні многочлени, мають точками розриву нулі функції $Q_m(x)$.

2. Операція диференціювання неперервних функцій. Так, функція $y = [x]$ не має похідної в точці $x = 0$, і, значить, її похідна розривна при $x = 0$.

3. Розривні розв'язки функціональних рівнянь та їх систем. Так, німецький математик Г.Гамель довів існування розривних розв'язків рівнянь Коші:

$$f(x+t) = f(x) + f(t), f(x+t) = f(x) \cdot f(t), f(x \cdot t) = f(x) + f(t).$$

4. Основним джерелом розривних функцій є операція граничного переходу. Так,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Вперше серйозні дослідження розривних функцій здійснив французький математик Рене Луї Бер (1874-1932). Він дав відому класифікацію розривних функцій (класи Бера) за числом знаків границі, що входять до самого означення функції [4]. Його теорію розривних функцій перекладено у 1932р. російською мовою.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є викладення маловідомих фактів про розривні функції однієї дійсної змінної.

Виклад основного матеріалу. Загальні властивості розривних функцій. Одним з основних питань теорії розривних функцій є питання про структуру множини їх точок розриву. Виявляється, що вона не може бути довільною, оскільки має місце наступна важлива теорема.

Теорема 1. Множина $E \subset R$ точок розриву функції $f(x)$, $x \in D(f)$ є множиною F_σ . Для довільної множини $F_\sigma \subset R$ існує обмежена функція $f(x)$, множина точок розриву якої співпадає з F_σ .

Доведення можна знайти в [1, с.59].

Нагадаємо, що множина $E \subset R$ називається

$$E = \bigcup_n F_n$$

множиною F_σ , якщо $E = \bigcup_n F_n$, де F_n - замкнені множини, а n приймає скінченну або зчисленну множину значень.

Наслідок. Не існує функції $f(x)$, неперервної в усіх раціональних точках і розривної в усіх ірраціональних точках R .

Справедливість наслідку випливає з теореми 1 і з того, що множина всіх ірраціональних чисел R не є множиною F_σ , оскільки вона континуальна.

Зауваження. Теорема 1 справедлива і для функцій кількох змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ [2, с.75].

Існують класи функцій, що мають зчисленну множину точок розриву.

Теорема 2. Множина точок розриву довільної монотонної функції не більш, ніж зчисленна. Довільна зчисленна множина $E \subset R$ є множиною точок розриву деякої монотонної функції.

Доведення можна знайти в [1, с.64-65].

Наслідок. Кожна функція обмеженої варіації має не більш, ніж зчисленну множину точок розриву.

Справедливість цього наслідку випливає з теореми 2 і того факту, що функції обмеженої варіації є різницею двох монотонних функцій.

В посібнику [3, с.74-75] показано, що функція

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n}, \quad x \in [0; 1], \quad \{r_n\} -$$

множина всіх раціональних чисел відрізка $[0; 1]$, неперервна на $[0; 1]$ як сума рівномірно збі-

жного ряду неперервних функцій $f_n(x) = \frac{|x - r_n|}{3^n}$, диференційовна в усіх ірраціональних точках відрізка $[0; 1]$ і не диференційовна в усіх раціональних точках інтервалу $(0; 1)$, отже, її похідна розривна в цих точках.

Поняття про класифікацію Бера. Рене Луї Бер (1874-1932) був одним із перших математиків, який вніс значний вклад у теорію розривних функцій. Його монографія [4] про розривні функції стала класичною. З теорією Бера можна познайомитися по книзі [5, с.422-443].

Множину всіх неперервних функцій на відрізку $[a; b]$ Бер назвав нульовим класом K_0 . Якщо $f(x)$ не належить класу K_0 , але її можна подати у вигляді $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, де всі функції $f_n(x)$ неперервні, то $f(x)$ називається функцією першого класу K_1 . Аналогічно, функція $f(x)$, $x \in [a; b]$, що не входить в класи K_0 і K_1 , але допускає

представлення у вигляді $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, де всі функції $f_n(x)$ входять у клас K_1 , називається функцією другого класу K_2 . Взагалі, функцією класу K_m називається функція, що не входить в кожний попередній клас, але допускає представлення у вигляді $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, де всі $f_n(x)$ належать класу K_{m-1} .

Так індуктивно визначені класи $K_0, K_1, \dots, K_m, \dots$. Цю класифікацію можна продовжити на трансфінітні числа. Тут ми обмежимося натуральними номерами класів Бера. Основними властивостями функцій класів $K_1, \dots, K_n, \dots$ є: всі вони вимірні, оскільки вимірні неперервні функції, а операція граничного переходу не виводить з класу вимірних функцій; множина всіх функцій Бера має потужність континууму; всі класи Бера непорожні. А.Лебег установив критерій належності розривної функції $f(x)$ до класу K_1 [5, с.434-436], сам Бер показав, що функції класу K_1 мають на відрізку $[a; b]$ точки неперервності в усякій замкненій множині $E \subset [a; b]$. З цього результату випливає, що функція Рімана $R(x)$ є функцією першого класу Бера, а функція Діріхле $D(x)$ є функцією другого класу Бера. Цікавим є факт існування розривних функцій, що не входять у класи Бера. Дійсно, множина усіх функцій, визначених на відрізку $[a; b]$ має потужність, більшу за потужність континууму [5, с.30-31], а множина усіх функцій Бера має потужність континууму.

Класичні розривні функції. Так називають історично перші розривні функції: функцію Діріхле $D(x)$, функцію Рімана $R(x)$, функцію Дірака $\delta(x)$. Вони відіграли революційну роль у встановленні сучасного поняття функції, створенні теорії узагальнених функцій. Тут ми розглянемо їх основні властивості.

1. Функція Діріхле $D(x)$. Вона визначається рівностями $D(x) = 1$, якщо $x \in \mathbb{Q}$ і $D(x) = 0$, якщо $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Теорема 3. Функція Діріхле має такі властивості:

1. $D(x)$ розривна в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, причому всі її точки розриву другого роду;
2. $D(x)$ періодична, причому кожне раціональне число $r \neq 0$ є її періодом, а кожне ірраціональне число не являється її періодом;
3. $D(x)$ не інтегрована за Ріманом на кожному відрізку $[a; b] \subset \mathbb{R}$;
4. $D(x)$ вимірна на кожному відрізку $[a; b] \subset \mathbb{R}$;
5. $D(x)$ інтегрована за Лебегом на кожному

відрізку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, причому
$$(4) \int_a^b D(x) dx = 0$$
;

6. $D(x)$ належить до другого класу Бера.

Доведення. Властивість 1 випливає з того, що функція $D(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ не має границі. Властивість 2 випливає з того, що $x \pm r$, $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$ і x одночасно раціональні або ірраціональні. Неінтегрованість $D(x)$ за Ріманом випливає з того, що множина точок розриву $D(x)$ має додатну міру Лебега, а саме $b - a$. Інтегрованість $D(x)$ за Лебегом випливає з обмеженості і вимірності $D(x)$ на довільному відрізку. Належність $D(x)$ до класу K_2 випливає з рівності: $D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \cos(m! \pi x)^{2n}$.

Теорему 3 доведено.

2. Функція Рімана $R(x)$. Вона визначається рівностями: $R(0) = 1$, $R(x) = 0$, якщо $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $R\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}$, якщо $x = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, дріб $\frac{m}{n}$ – нескоротний, тобто $(m, n) = 1$.

Теорема 4. Функція Рімана $R(x)$ має такі властивості:

1. $R(x)$ неперервна в ірраціональних точках і розривна в раціональних точках;
2. $R(x)$ періодична, її найменший додатний період 1;
3. $R(x)$ інтегрована за Ріманом на довільно-

му відрізку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, причому
$$\int_a^b R(x) dx = 0$$
;

4. $R(x)$ – функція першого класу Бера.

Доведення. Властивість 1 випливає з того, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} R(x) = 0 = R(a), \quad \text{а} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow r \\ r \in \mathbb{Q}}} R(x) = 0 \neq R(r).$$

Властивість 2 очевидна, оскільки $x = [x] + \{x\}$; властивість 3 випливає з того, що міра Лебега множини точок розриву $R(x)$ дорівнює нулю, оскільки множина раціональних чисел

довільного відрізка зчислення. Належність $R(x)$ до першого класу Бера випливає з теореми Бера.

Теорему 4 доведено.

3. Дельта функція Дірака $\delta(x)$. Це історично перша узагальнена функція, яку в 1928 р. ввів англійський фізик Поль Адріан Моріс Дірак (1902–1984) в своїй монографії «Принципи квантової механіки». Функція $\delta(x)$ визначається так: $\delta(x) = 0$

для довільного $x \neq 0$, а
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Тодішня математика не прийняла цю функцію в сім'ю функцій. Ця обставина, проте не хвилювала Дірака, він широко користувався нею, диференціював, інтегрував, множив на інші функції. Згодом у працях С.Л.Соболева і Л.Шварца була побудована строга теорія так званих узагальнених функцій, у яку ввійшла і $\delta(x)$. Цю функцію можна подати як границю функцій $\varphi_n(x)$, де

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, +\infty\right) \\ n^2 x + n, & \text{якщо } x \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right] \\ n - n^2 x, & \text{якщо } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(x) dx = 1 \quad \text{для } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_n(x) = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0, \quad \text{для } \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0.$$

Функції $\varphi_n(x)$ називають дельта-подібними. Прикладами таких функцій є:

$$1. \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(1 + \alpha^2 x^2)}; \quad 2. \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}; \quad 3. \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)},$$

де $\alpha > 0$ – параметр.

Безпосередньою перевіркою переконаємося, що $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x) = \delta(x)$ у першому прикладі, і $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \varphi_\alpha(x) = \delta(x)$ у другому і третьому прикладах.

Теорема 5. Дельта-функція Дірака $\delta(x)$ має такі властивості:

$$1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(a)$$

$$2. \quad \delta(x) = \delta(-x)$$

$$3. \quad x \cdot \delta(x) = 0$$

$$4. \quad \delta'(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq 0 \\ -\infty, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$$

$$5. \quad x \cdot \delta'(x) = -\delta(x)$$

$$6. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \varphi_n(x) dx = -\varphi'(0)$$

$$7. \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

$$8. \quad \delta((x-a)(x-b)) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x-b)}{|a-b|}$$

$$9. \quad \delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}$$

10. $\delta(x)$ є функцією першого класу Бера.

Доведення цих властивостей можна отримати, використавши одне з означень $\delta(x)$, наведених вище. Так, рівність 3 випливає з

$$x \delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x}{\pi (1 + \alpha^2 x^2)} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{x}{\pi \cdot 2\alpha x} = 0.$$

Розривні функції широко використовуються для побудови контрприкладів. Так функція $f(x) = D(x) \cdot \sin \pi x$ неперервна в усіх точках $x = m \in \mathbb{Z}$ і розривна в усіх інших точках R ; функція $\varphi(x) = x^2 \cdot D(x)$ диференційована в точці $x = 0$ і не диференційована в усіх інших точках R ;

функція $\psi(x) = (x - a_1)^2 \cdot (x - a_2)^2 \cdot \dots \cdot (x - a_n)^2 \cdot D(x)$ диференційована в точках $a_1, a_2, \dots, a_n$ і не дифере-

нційована в усіх інших точках R ; функція $F(x, y) = D(x) \cdot D(y)$ розривна в кожній точці площини XOY . Розв'язками рівняння $y^2 - 1 = 0$ є функції $y = 1$ і $y = -1$, $x \in R$. Якщо E – непорожня множина дійсних чисел, $E \neq R$, то функції

$$y_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in E \\ -1, & \text{якщо } x \in R \setminus E. \end{cases}$$

а також $-y_E(x)$ будуть розв'язками цього рівняння.

Зокрема, якщо $E = Q$, то $y_Q(x) = 2D(x) - 1$, $x \in R$.

Розривні розв'язки функціональних рівнянь. Традиційно показникову функцію в дійсній області визначають рівностями:

$$a^1 = a; \quad a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1); \quad a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \in \mathbb{Z}); \quad a^\alpha = \lim_{r_n \rightarrow \alpha} a^{r_n}, \quad (\alpha - \text{іраціональне число}, r_n \in Q, \forall n \in \mathbb{N}).$$

З них випливає обмеження: $a > 0$. При $a = 1$ всі степені дорівнюють 1, маємо сталу функцію. Тому вважають, що $a \neq 1$. Показникова функція (позначають a^x) неперервна і монотонна на R , задовольняє рівняння:

$$f(x+t) = f(x) \cdot f(t), \quad \forall x, t \in R. \quad (1)$$

Вивчимо властивості розв'язків $f(x)$ рівняння (1) по самому цьому рівнянню. Справедливі наступні твердження.

1. Якщо $f(x_0) = 0$ для якого-небудь $x_0 \in R$, то $f(x) \equiv 0$ на R .

Справді, для $\forall x \in R$ з (1) маємо

$$f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

2. Якщо $f(x_1) \neq 0$ для якого-небудь $x_1 \in R$, то $f(x) \neq 0$ для $\forall x \in R$.

Це наслідок властивості 1.

3. Якщо $f(x) \neq 0$ для $\forall x \in R$, то $f(x) > 0$ для $\forall x \in R$.

$$\text{Справді, } f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0.$$

4. Якщо $f(x) \neq 0$ для $\forall x \in R$, то $f(0) = 1$,

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}, \quad f(nx) = f^n(x), \quad f\left(\frac{m}{n}x\right) = \sqrt[n]{f^m(x)}, \quad f(r) = a^r, \text{ де } a = f(1), r \in Q.$$

Справді, $f(x+0) = f(x) \cdot f(0)$, звідки з умови $f(x) \neq 0$ випливає, що $f(0) = 1$. Далі $1 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \cdot f(-x)$.

лі

$$\text{звідки } f(-x) = \frac{1}{f(x)} \text{ і т.д.}$$

5. Якщо $f(x) \neq 0$ для $\forall x \in R$ і $f(x)$ неперервна в точці $x_0 \in R$, то $f(x)$ неперервна в усякій іншій точці $x \in R$.

Справді, $f(x_0 + t) \rightarrow f(x_0)$ коли $t \rightarrow 0$, а $f(x+t) = f(x_0 + t + x - x_0) = f(x - x_0) \cdot f(x_0 + t) \rightarrow f(x - x_0)$ коли $t \rightarrow 0$, що і означає неперервність $f(x)$ у точці x .

6. Якщо $f(x)$ розривна в якій-небудь точці $x_1 \in R$, то $f(x)$ розривна в усякій іншій точці $x \in R$.

Це наслідок властивості 5.

7. Якщо $f(x)$ диференційовна в якій-небудь точці $x_0 \in R$, то $f(x)$ диференційовна в усякій іншій точці $x \in R$.

Справді,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x}$$

і, отже, існує $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = c$, звідки

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = c \cdot f(x).$$

8. Якщо $f(x)$ не диференційовна в якій-небудь точці $x_1 \in R$, то $f(x)$ не диференційовна в усякій іншій точці $x \in R$.

Це наслідок властивості 7.

9. Якщо $f(x)$ монотонна в деякому δ - околі якої-небудь точки $x_1 \in R$, то вона монотонна в δ - околі всякої іншої точки $x_2 \in R$.

Справді, якщо $f(x)$ монотонна на інтервалі $(x_1 - \delta; x_1 + \delta)$,

то

$$f(x_2 + t) = f(x_2 + t + x_1 - x_1) = f(x_2 - x_1) \cdot f(x_1 + t)$$

, звідки з додатності $f(x_2 - x_1)$ впливає монотонність $f(x)$ на інтервалі $(x_2 - \delta; x_2 + \delta)$. При цьому якщо $a = f(1) > 1$, то $f(x)$ зростає на R , якщо $0 < a < 1$, то $f(x)$ спадає на R .

10. Якщо $f(x)$ немонотонна в якому-небудь околі точки $x_0 \in R$, то вона немонотонна в довільному околі всякої іншої точки $x \in R$.

Це наслідок властивості 9.

11. Якщо $f(x)$ обмежена в деякому δ -околі якої-небудь точки $x_1 \in R$, то вона обмежена в δ -околі всякої іншої точки $x_2 \in R$.

Ця властивість впливає з рівності $f(x_2 + t) = f(x_2 - x_1) \cdot f(x_1 + t)$.

12. Якщо $f(x)$ необмежена в якому-небудь

околі якої-небудь точки $x_1 \in R$, то вона необмежена в довільному околі всякої іншої точки $x_2 \in R$.

Це наслідок властивості 11.

Позначимо через H -множину усіх неперервних, через M -множину усіх монотонних, через D -множину усіх диференційовних, через O -множину усіх обмежених у якому-небудь околі якої-небудь точки $x \in R$ розв'язків рівняння (1). Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Множини H, M, D, O співпадають і складаються з функцій

$$f_1(x) \equiv 0, \quad f_2(x) \equiv 1, \quad f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1, \quad a = f(1).$$

Доведення можна знайти в [6, с.120].

У 1905 році німецький математик Г.Гамель довів існування розривних розв'язків рівняння $F(x+t) = F(x) + F(t)$, до якого рівняння (1) зводиться підстановкою

$F(x) = \ln f(x)$, $f(x) > 0$ для $\forall x \in R$ [7, с.459-462]. Тоді кожному розривному розв'язку $F(x)$ буде відповідати розривний розв'язок $f(x) = e^{F(x)}$. Згідно властивостей 6, 10, 12 і теореми 6 цей

розв'язок має фантастичні властивості: він розривний у кожній точці $x \in R$, немонотонний на довільному інтервалі і необмежений у довільному околі кожної точки $x \in R$.

Аналогічні факти можна отримати для розв'язків рівняння $f(xt) = f(x) + f(t)$, а також для системи рівнянь, що визначають функції $\sin x, \cos x$.

Список використаної літератури:

1. Окстобидж. Мера и категория. – М.: Мир, 1974. – 157 с.
2. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. – М.: Просвещение, 1968. – 311 с.
3. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ (в примерах и задачах), ч.2. – К.: Вища школа, 1977. – 672 с.
4. Бер Р. Теория разрывных функций. – М-Л.: ГТТИ, 1932. – 136 с.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М. Наука, 1974. – 480 с.
6. Власенко В.Ф. Різкі означення показникової функції. – С, Наукові записки Сумського педінституту, вип. 1, 1993, С. 118 – 122.
7. Hamel G. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. 1905, Vol. 60, S. 459 – 462.

В статті приведено малоизвестные факты о множестве точек разрыва функции $f(x)$, детально исследованы классические разрывные функции Дирихле, Римана, Дирака и их приложения, а также доказано существование разрывных решений функциональных уравнений Коши.

The paper presents the little-known facts about the set of points of discontinuity of $f(x)$, were studied in detail classical discontinuous functions Dirichlet, Riemann, Dirac, and their applications, as well as the existence of discontinuous solutions of the Cauchy functional.

Дата надходження в редакцію: 06.05.2012. р.

Рецензент: д.т.н., професор Кочмола М.М.