

де

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos 2\omega_0 t \\ \sin 2\omega_0 t \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2}{6\omega_0} \left\{ \begin{pmatrix} B\omega_0 \\ -A \end{pmatrix} \cos 4\omega_0 t + \right. \\ \left. + 2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sin 4\omega_0 t + 3 \begin{pmatrix} -\frac{B}{\omega_0} \\ A \end{pmatrix} \right\} + O(\varepsilon^3).$$

Період коливань T можна уточнити за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} (1 + \tau\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)),$$

$$\text{де } \tau = -\frac{1}{\omega_0} \left(\operatorname{Im} \psi - \operatorname{Re} \psi \frac{\partial \operatorname{Im} \lambda}{\partial a} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda}{\partial a} \right),$$

$$\text{де } \operatorname{Im} \psi = -\frac{5}{12\omega_0} \left(A^2 - \frac{B^2}{\omega_0^2} \right); \quad \frac{\partial \operatorname{Im} \lambda}{\partial a} / \frac{\partial \operatorname{Re} \lambda}{\partial a} = \frac{-b}{2\omega_0} \cdot \frac{2Q}{2(1-\alpha-\beta)b-Q}.$$

Ці формули разом з уже наведеними вище формулами для $\operatorname{Re} \psi$ і ε^2 дозволяють розрахувати приріст періоду T .

В таблиці 1 наведені результати розрахунку умови існування періодичного режиму $\gamma(1-\beta d) > b(1-\alpha-\beta)$.

Таблиця 1

b	γ	α	β	d	$\gamma(1-\beta d)$	$b(1-\alpha-\beta)$
0,2	0,7	0,3	0,2	0,2	0,672	0,01
0,4	0,4	0,2	0,1	0,5	0,98	0,7

Висновок. Знайдено умови, при яких рівень виробництва і викликаного ним забруднення змінюються періодично, утворюючи стійкий граничний цикл. Одержано наближений періодичний розв'язок моделі.

Література.

1. Медоуз Д.Х. Пределы роста. / Д.Х.Медоуз, Д.Л.Медоуз и др. / Изд.-во Московского университета. 1991.- 206с.
2. Хэссард Б. Теория и приложения бифуркации рождения цикла./ Б.Хэссард, Н.В.Казаринов, И.Вэн / М.: Мир, 1985.-280с.

УДК 517.5

ЕКЗОТИЧНІ ФУНКЦІЇ

Неочевидне-ймовірне

Власенко В.Ф., Розуменко А.М.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Поняття функції – одне з фундаментальних понять сучасної математики, яке об'єднує дійсний, комплексний і функціональний аналізи. Протягом розвитку математики воно весь час уточнювалось, розширювалось, узагальнювалось. У цьому нелегкому, інколи драматичному процесі еволюції поняття функції, не остання роль належить відкриттям незвичайних за своїми властивостями, так званих «екзотичних» функцій. Кожна з них свого часу привела до зміни класичних уявлень про поняття функції. Доки їх було небагато, вони сприймалися

більшістю вчених як можливі виключення з правил. З часом виявилося, що «екзотичних» функцій набагато більше, ніж «класичних», і вони мають не менше прав на існування, ніж інші. Тому предметом дослідження багатьох математиків є встановлення, обґрунтування та узагальнення властивостей таких функцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Про відношення до «екзотичних» функцій можна судити з висловлювань відомого математика, фізика, астронома і філософа А. Пуанкаре (1854-1912), який у 1908 р. писав: «Протягом піввіку ми бачили, як виникла безліч химерних функцій; ці нові функції немов намагались якомога менше походити на ті благородні функції, які для чогось та придатні. Такі, наприклад, функції неперервні, але без похідних і т.д. Більше того, з логічного погляду саме ці химерні функції і є загальними; а ті функції, котрі ми знаходимо без довгих пошуків, становлять начебто окремий випадок. Для них залишається лише окремий куточок. Колиш при знаходженні нових функцій мала на увазі якась практична мета. Тепер функції відшукують спеціально для того, щоб виявити недостатність міркувань наших батьків, ніякого іншого висновку, крім цього, з них зробити не можна» [2, с. 357].

Подальший розвиток математики показав хибність поглядів Пуанкаре та ряду інших учених відносно «химерних» функцій, які знайшли не тільки теоретичні, але і практичні застосування.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Завдання статті полягає в обґрунтуванні та узагальненні властивостей функцій, які мають власні імена, а саме функції: Діріхле, Рімана, Кантора, Вейєрштрасса, Дірака.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Функція Діріхле. Так названо функцію $D(x)$ на честь німецького математика Петера Густава Лежена Діріхле (1805-1859), яка задається умовами: $D(x) = 1$, якщо x – раціональне число, $D(x) = 0$, якщо x – ірраціональне число. Незвичайна властивість, яка одразу ж виділила її з поміж інших функцій, полягає в тому, що вона всюди розривна. Кожна точка $x \in \mathbb{R}$ є точкою розриву другого роду. Це впливає з того, що для довільного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ не існує границі $D(x)$ в точці x . Справді, якщо (x_n) – послідовність раціональних чисел, збіжна до x , то $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = 1$, а для послідовності $(x_n + \frac{\sqrt{2}}{n})$ – ірраціональних чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n + \frac{\sqrt{2}}{n}) = 0$.

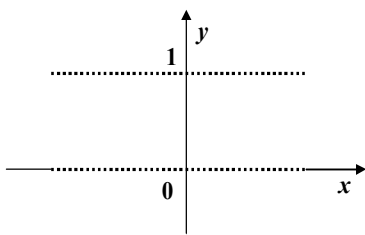


Рис. 1.

Уявлення про графік функції Діріхле дає рис.1.

Точки на осі Ox – це значення функції $D(x)$ в ірраціональних точках x , а точки, які «висять» на висоті 1 над віссю Ox – значення функції $D(x)$ в раціональних точках x .

Очевидно, функція Діріхле $D(x)$ парна.

Іншою незвичайною властивістю функції Діріхле $D(x)$ є те, що довільне раціональне число $r \neq 0$ є періодом цієї функції, а отже вона не має найменшого періоду.

Справді, $D(x+r) = D(x)$ для довільного $x \in \mathbb{R}$ і довільного $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, оскільки при $x \in \mathbb{Q}$ маємо $D(x+r) = D(x) = 1$, а при $x \in I$, де I – множина усіх ірраціональних чисел, $D(x+r) = D(x) = 0$. В той же час кожне ірраціональне число α не є періодом функції $D(x)$. Дійсно, $D(\alpha + (-\alpha)) = D(0) = 1 \neq D(-\alpha) = 0$.

Для функції Діріхле не існує первісної у кожному проміжку $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$. Це випливає з теореми Дарбу [1, с. 215]. Якщо припустити існування функції $f(x)$ такої, що $f'(x) = D(x)$ на $\langle a, b \rangle$, то тоді $f'(r) = D(r) = 1$, $r \in \mathbb{Q} \cap \langle a, b \rangle$, а $f'(a) = D(a) = 0$ в ірраціональних точках $\langle a, b \rangle$. За названою теоремою Дарбу для довільного числа $c \in (0, 1)$ існує точка $\beta \in \langle a, b \rangle$ така, що $f'(\beta) = c = D(\beta)$, що неможливо.

Функція Діріхле не інтегрована за Ріманом на кожному відрізку $[a, b]$. Це випливає з того, що для довільного (T) –розбиття відрізка $[a, b]$ і вибору раціональних точок c_k на відрізках (T) –розбиття, $k = \overline{1, n}$, інтегральна сума $S(T) = \sum_{k=1}^n D(c_k) \Delta x_k = b - a > 0$, а для ірраціональних точок α_k інтегральна сума $S(T) = \sum_{k=1}^n D(\alpha_k) \Delta x_k = 0$. Звідси випливає, що границя інтегральних сум функції $D(x)$ не існує.

В той же час функція Діріхле інтегрована за Лебегом, оскільки вона вимірна на довільному відрізку $[a, b]$ і обмежена, причому її інтеграл Лебега дорівнює нулю.

Для подальшого нам потрібна інформація про класифікацію функцій, запропоновану французьким математиком Рене Луї Бером (1874-1932). Нехай задано відрізок $[a, b]$. Тоді множина усіх неперервних на $[a, b]$ функцій утворює нульовий клас Бера B_0 . Якщо функція $f(x)$ не належить B_0 , але допускає представлення у вигляді

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in [a, b], \quad (*)$$

де всі функції $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ і неперервні, то $f(x)$ називається фуункцією першого класу, а їх множина позначається B_1 .

Наступний другий клас Бера B_2 складається з функцій, що не входять в класи B_0 і B_1 , але допускають представлення у вигляді (*), де $f_n(x)$ належать класам B_0 і B_1 .

І взагалі, функцією класу B_m називається функція, що не входить в кожний попередній клас, але є границею послідовності функцій класів, менших m .

Бер показав, що кожний клас функцій не порожній. Детальніше про класифікацію Бера можна знайти в [3, с. 422-452].

Функція Діріхле є функцією другого класу Бера, оскільки її можна представити як границю функцій $\varphi_n(x)$ першого класу Бера. Функції $\varphi_n(x)$ будуються так. Занумеруємо яким-небудь способом усі раціональні числа і покладемо

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x = r_k \text{ (} k = 1, 2, \dots, n \text{)}, \\ 0, \text{ якщо } x \neq r_k \text{ (} k = 1, 2, \dots, n \text{)}. \end{cases}$$

Тоді кожна функція $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ є розривною функцією (а, отже, належить першому класу Бера), а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \in I, \end{cases}$$

тобто є функцією Діріхле.

Функцію Діріхле можна визначити рівністю $D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \pi m! x)^{2n}$.

Справді, якщо $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то $m! x = m! \frac{p}{q} = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (q-1)(q+1) \cdot \dots \cdot mp = 2k$, $\cos \pi m! x = 1$ і $D(x) = 1$. [2, с. 158].

Якщо x – ірраціональне число, то $m! x$ не є цілим для довільних цілих m , отже $|\cos \pi m! x| < 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \pi m! x)^{2n} = 0$, звідки $D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} 0 = 0$.

За допомогою функції Діріхле можна будувати різні контрприклад.

Так, функція $f(x) = D(x) \cdot \sin \pi x$, неперервна в точках $x = n \in \mathbb{Z}$ і розривна в усіх інших точках прямої. Справді, $\lim_{x \rightarrow n} D(x) \cdot \sin \pi x = 0 = D(n) \cdot \sin \pi n$.

Якщо $x_0 \neq n \in \mathbb{Z}$, то $\sin \pi x_0 \neq 0$, і якби $f(x)$ була неперервною в точці x_0 , то в цій точці була б неперервною і функція $D(x)$, як частка двох неперервних функцій, що неможливо.

Функція $\varphi(x) = x^2 \cdot D(x)$ диференційовна в точці $x = 0$ і недиференційовна в усіх інших точках. Справді,

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0.$$

У точках $x \neq 0$ функція $\varphi(x)$ розривна, а, отже, і не диференційовна.

Функція $\psi(x) = (x - a_1)^2(x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 \cdot D(x)$ диференційовна в точках $a_1, a_2, \dots, a_n$ і не диференційовна в усіх інших точках $\mathbb{R}$. Міркування аналогічні попередньому прикладу.

Функція $F(x, y) = D(x) \cdot D(y)$ розривна в кожній точці площини XOY . Це випливає з того, що $F(x, y) = 1$, якщо $x \in \mathbb{Q}$ і $y \in \mathbb{Q}$, і $F(x, y) = 0$, якщо одне з чисел x або y є ірраціональним, а в довільному околі точки (x, y) існує безліч як раціональних, так і ірраціональних точок.

Знайдемо усі дійсні розв'язки функціонального рівняння $y^2 - 1 = 0$. Функції $y = 1$ і $y = -1$, $x \in \mathbb{R}$ є очевидно розв'язками цього рівняння. Нехай E – непорожня множина дійсних чисел, $E \neq \mathbb{R}$. Тоді функція

$$y_E(x) = \begin{cases} 1, \text{якщо } x \in E, \\ -1, \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus E, \end{cases}$$

а також $-y_E(x)$ будуть також розв'язками даного рівняння. Функції $y_E(x)$ подібні до функції Діріхле. Зокрема, якщо $E = \mathbb{Q}$, то $y_{\mathbb{Q}}(x) = 2D(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Функція Рімана. Так на честь Георга Фрідріха Бернгарда Рімана (1826-1866) названа функція $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{якщо } x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1, \\ 1, \text{якщо } x = 0, \\ 0, \text{якщо } x - \text{іраціональне число.} \end{cases}$

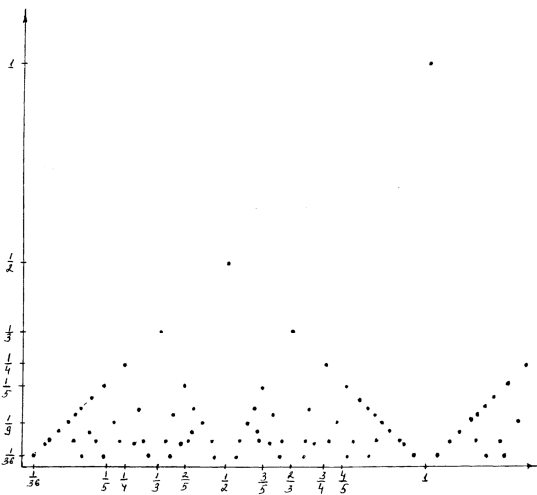


Рис. 2.

Уявлення про графік функції $R(x)$ дає рис.2.

Дивовижна властивість функції Рімана полягає в тому, що вона розривна в кожній раціональній точці і неперервна в кожній ірраціональній точці прямої. Розривність $R(x)$ у раціональній точці r випливає з того, що $R(r) > 0$ і для послідовності $(r + \frac{\sqrt{2}}{n})$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R\left(r + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0 \neq R(r).$$

Неперервність $R(x)$ у ірраціональній точці α випливає з того, що для довільної послідовності (r_n)

раціональних чисел, збіжної до α , маємо

$$r_n = \frac{p_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} R(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0 = R(\alpha)$$

Очевидно, функція Рімана парна.

Менш очевидним є її періодичність з найменшим (основним) періодом $T = 1$. Довільне ірраціональне число α не є періодом функції Рімана, оскільки для довільного $x \in \mathbb{Q}$ число $x + \alpha \in I$ і рівність $R(x + \alpha) = R(x)$ не виконується, бо $R(x) > 0$, а $R(x + \alpha) = 0$.

Будемо шукати періоди функції $R(x)$ серед раціональних чисел. Нехай $T = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$, $a \in \mathbb{Z}$. Тоді для $x = \frac{m}{n}$ повинно бути $R(x + T) = R\left(\frac{m}{n} + \frac{a}{b}\right) = R\left(\frac{mb + na}{nb}\right) = \frac{1}{nb} = R(x) = \frac{1}{n}$, звідки $b = 1$, $T = a \in \mathbb{Z}$. Оскільки T повинно бути найменшим додатним цілим числом, то $T = 1$.

Функція Рімана інтегрована за Ріманом на довільному відрізку $[a, b]$, оскільки множина її точок розриву на $[a, b]$ зліченна, а, отже, має міру Лебега нуль, причому

$$(R) \int_a^b R(x) dx = 0.$$

Остання рівність випливає з того, що для обчислення $(R) \int_a^b R(x) dx$, існування якого забезпечує критерій R -інтегровності в термінах міри Лебега множини точок розриву $R(x)$, можна взяти спеціальні інтегральні суми функції $R(x)$. Спеціальність полягатиме в тому, що при довільному (T) – розбитті відрізка $[a, b]$ за точки $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ($k = \overline{1, n}$) будемо брати ірраціональні числа. Тоді для них $S(T) = 0$, і, отже

$$(R) \int_a^b R(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = 0.$$

Звідси випливає, що функція Рімана інтегровна і за Лебегом, і $(L) \int_a^b R(x) dx = 0$.

Цікаво відзначити, що $R(x) \cdot D(x) = R(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, або $R(x) \cdot (1 - D(x)) = 0$.

Функція Рімана є функцією першого класу Бера, оскільки вона неперервна в кожній ірраціональній точці. Складна функція

$$R(R(x)) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in I, \\ \frac{1}{n}, & \text{при } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, \quad (m, n) = 1, \end{cases} \quad \text{а також при } x = 0.$$

розривна в кожній точці прямої і є функцією другого класу Бера, як і функція Діріхле.

Неважко перекоонатися, що функція $\varphi(x) = D(x) - R(x)$ є функцією другого класу Бера, функція $\psi(x) = D(x) \cdot R(x)$ є функцією першого класу Бера, а функція

$$f(x) = \frac{\text{sign } x}{R(R(x))}, \quad \text{де } \text{sign } x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ +1, & \text{якщо } x > 0, \end{cases}$$

є функцією другого класу Бера.

Функція Кантора. Так названа наступна функція на честь німецького математика Георга Кантора (1845 - 1918), який розробив теорію нескінченних множин і одну з теорій ірраціональних чисел, що суттєво вплинули на розвиток математики XX століття.

Для побудови функції Кантора $K(x)$ позначимо через D множину дійсних чисел відрізка $[0, 1]$, з якого вилучені інтервали

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right), \dots$$

Назвемо інтервалами k -го рангу ті інтервали, довжини яких дорівнюють $\frac{1}{3^k}$ [4, с. 75]. Тоді інтервалом першого рангу буде $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, покладемо на ньому $K(x) = \frac{1}{2}$.

Інтервалами другого рангу будуть $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ і $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Покладемо на інтервалі $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ $K(x) = \frac{1}{4}$, а на інтервалі $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ $K(x) = \frac{3}{4}$.

Інтервалами k -го рангу будуть $\left(\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right), \dots, \left(\frac{2^k-2}{3^k}, \frac{2^k-1}{3^k}\right)$. Покладемо $K(x) = \frac{1}{2^k}$ на інтервалі $\left(\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right)$, $K(x) = \frac{3}{2^k}$ на другому інтервалі k -го рангу, $K(x) = \frac{5}{2^k}$ на третьому інтервалі k -го рангу т.д. $K(x) = \frac{2^k-1}{2^k}$ на останньому інтервалі k -го рангу.

Цим самим функція Кантора визначена на доповненні CD множини D відносно відрізка $[0, 1]$. Вона, очевидно, монотонна на CD і множина її значень всюди щільна на $[0, 1]$, оскільки значеннями $K(x)$ на CD є всі двійкові раціональні числа між 0 і 1.

Доозначимо $K(x)$ на множині D , поклавши для $x \in D$

$$K(x) = \sup_{t \leq x, t \in CD} K(t).$$

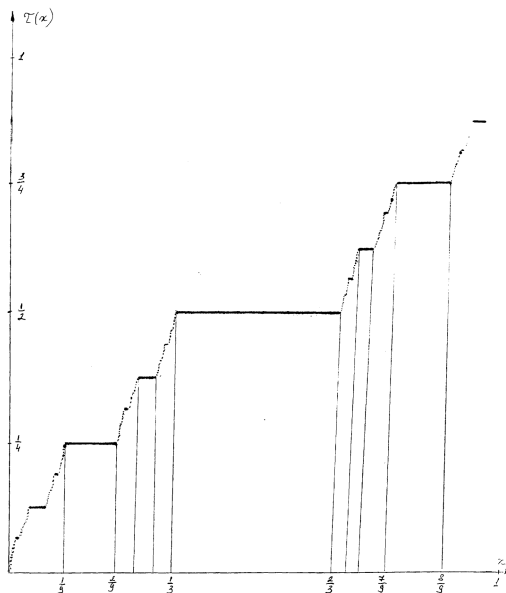


Рис. 3.

Покладаючи $K(0) = 0$, $K(1) = 1$, отримаємо означення $K(x)$ на відрізку $[0, 1]$.

Уявлення про графік функції Кантора дає рис. 3. Графік функції $K(x)$ називають «чортовою драбиною».

Очевидно, функція Кантора монотонна (неспадна) на $[0, 1]$. На множині CD вона, очевидно, неперервна, як стала на інтервалах цієї множини. Припустимо, що функція $K(x)$ розривна в деякій точці $x_0 \in D$, тоді це буде розрив першого роду, оскільки вона монотонна. Тому хоча б один з інтервалів $(K(x_0 - 0), K(x_0))$, $(K(x_0), K(x_0 + 0))$ не містив би жодного значення функції $K(x)$, що неможливо, оскільки значеннями функції $K(x)$ є, зокрема, всі двійково-

раціональні числа відрізка $[0, 1]$, які розташовані всюди щільно на ньому.

Функція Кантора має похідну рівну нулю в усіх точках множини CD (бо вона стала на інтервалах цієї множини). Міра ж множини CD дорівнює сумі довжин усіх її складових інтервалів, тобто є сумою ряду

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{k-1}}{3^k} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Таким чином, $K'(x) = 0$ майже всюди на $[0, 1]$. Звідси випливає, що умова $f'(x) = 0$ майже всюди на $[0, 1]$ недостатня для сталості $f(x)$ на відрізку $[0, 1]$.

Для обчислення інтеграла Рімана функції $K(x)$ використаємо інтегрованість $K(x)$ за Лебегом. Тоді

$$(\mathbb{R}) \int_0^1 K(x) dx = (L) \int_0^1 K(x) dx = (L) \int_{\mathbb{CD}} K(x) dx + (L) \int_D K(x) dx.$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки міра множини D нуль, а $K(x)$ - обмежена на D .

$(L) \int_{\mathbb{CD}} K(x) dx$ дорівнює сумі площ прямокутників, побудованих на інтервалах множини $\mathbb{CD}$, тобто є сумою ряду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^2} \right) \cdot \frac{1}{3^2} + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^3} \right) \cdot \frac{1}{3^3} + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{3}{2^k} + \dots + \frac{2^k - 1}{2^k} \right) \cdot \frac{1}{3^k} + \dots = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{2 \cdot 3^k} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Функція Кантора застосовується в теорії ймовірностей, описуючи так званий сингулярний розподіл [5, с. 304].

Функція Вейерштрасса. Математиків давно хвилювало питання про диференційовність неперервної функції. Приклад функції $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ показує, що неперервності недостатньо для диференційовності. У 1806 р. французький фізик і математик А.Ампер у роботі про теорію похідних намагався обґрунтувати диференційовність неперервної функції скрізь, за винятком, можливо, деяких «виняткових та ізольованих» значень аргументу. В 1871 р. Карл Теодор Вільгельм Вейерштрасс (1815 - 1897) побудував неперервну на $\mathbb{R}$ функцію $v(x)$, не диференційовну в кожній точці $\mathbb{R}$! Приклад Вейерштрасса приголомшив сучасників. «Як інтуїція могла так підвести нас!» - вигукнув вражений цим прикладом французький математик, фізик, астроном і філософ Анрі Пуанкаре.

І справді, для геометрії приклад Вейерштрасса означав існування лінії, що не має дотичної в кожній точці! Для механіки це означало існування руху без швидкості! І перше і друге ніяк не в'язалося з інтуїтивними уявленнями про криву і рух. Згодом з'ясувалося, що таких функцій значно більше, ніж неперервних! І що вони мають практичні застосування, наприклад в теорії дифузії, броунівського руху, добре описують форму берегів морів та океанів.

К. Вейерштрасс задав свою знамениту функцію рядом $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, $0 < a < 1$, b — непарне натуральне число, більше 1, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

Ван-дер-Варден, використавши ідею Вейерштрасса, побудував простішу за конструкцією неперервну і ніде не диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію. Про них можна прочитати в [6, с. 78-85]. Зауважимо, що англійський математик Г.Харді (1877 - 1947)

показав у 1909 р., що функція $v(x)$ ніде не диференційовна також і при $ab > 1$. Уявлення про графік функції $v(x)$ дає рис. 4.

З нього видно, що характер функції $v(x)$ залишається однаковим на кожному інтервалі, яким би малим він не був!

Неперервні, ніде не диференційовні на проміжку (a, b) функції $f(x)$ мають дивовижні властивості: 1) кожна точка проміжку (a, b) є критичною точкою $f(x)$; 2) $f(x)$ не задовольняє умову Ліпшиця на кожному відрізку $[a, \beta] \subset (a, b)$; 3) $f(x)$ не має у проміжку (a, b) жодного інтервалу монотонності; 4) графік $f(x)$ є неспрямлюваною кривою на кожному відрізку $[a, \beta] \subset (a, b)$.

Доведення цих властивостей можна знайти в [7, с. 122-127].

У книзі Дж. Окстобі «Міра і категорія» (видавн. Мир, М., 1974. –157 с.) у главі 11 (с. 81 - 84) «Ніде не диференційовні функції» показано, що для неперервної функції існування на інтервалі хоча б в одній точці скінченної односторонньої похідної, або навіть обмеженість відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в якій-небудь точці з якої-небудь сторони є виключним випадком!

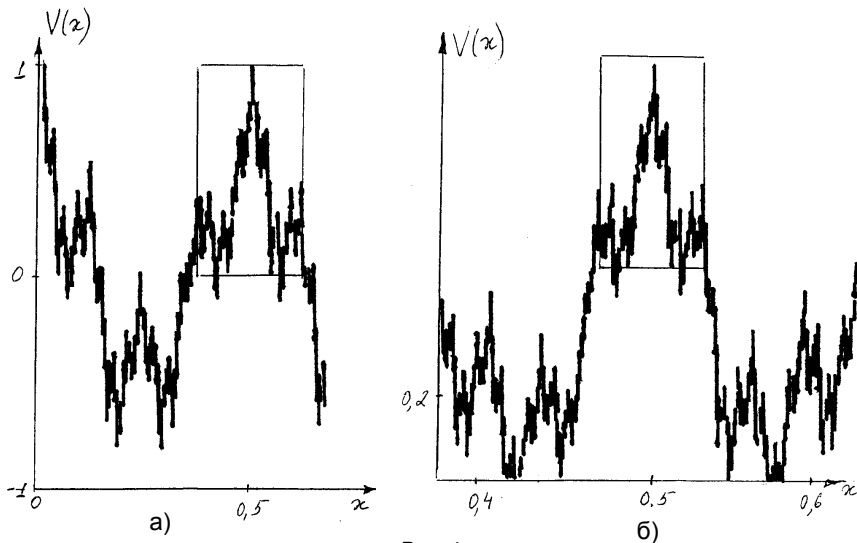


Рис. 4.

Цікаво відзначити, що в комплексній області неперервну і ніде не диференційовну функцію побудувати легко. Такою, наприклад, є функція $w = \bar{z} = x - iy$, оскільки для неї не виконуються умови Коші-Рімана.

Функція Дірака. Це історично перша узагальнена функція, яку у 1928 р. ввів англійський фізик Поль Адріан Моріс Дірак (1902 - 1984) в своїй монографії «Принципи квантової механіки» за допомогою рівностей
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1, \\ \delta(x) = 0, \forall x \neq 0. \end{cases}$$

Записана функція називається дельта-функцією Дірака і позначається $\delta(x)$. Зразу видно, що вона не може бути звичайною функцією як, наприклад, $y = x^2$, бо від функції вимагається, щоб вона мала певне значення для кожного $x \in D(f)$. Тут же ця функція не визначена для $x = 0$, а перший рядок означення $\delta(x)$ вимагає, щоб $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx$ був рівний 1. Ніяке конкретне скінченне значення $\delta(0)$ не задовольняє цю рівність, тож

доводиться вважати, що $\delta(0) = +\infty$. Але тоді $\int_a^b \delta(x) dx$, де $a < 0 < b$, не існує. Словом, тодішня математика не прийняла в свою сім'ю цю функцію. Але ця обставина не хвилювала Дірака, він поводився з нею, як і з іншими функціями: диференціював, інтегрував, множив на інші функції і т.д. Математики того часу ці дії Дірака сприймали як гру в формули. І навіть ті, хто використовував δ -функцію, приховували це в своїх публікаціях і давали отриманих за її допомогою результатам стандартні доведення. Аналогічна ситуація уже була в історії математики, коли Архімед методами інтегрального числення одержав цілий ряд нових теорем про площі і об'єми, а доводив їх вживанням тоді методом вичерпування.

Проте сам Дірак у названій роботі зробив зауваження, що δ -функцію не можна розглядати як звичайну функцію. Згодом у працях С.Л.Соболева і Л.Шварца була побудована строга теорія узагальнених функцій, частинним випадком якої є і δ -функція. Тим самим усі результати Дірака отримали «законний статус». Введена функція дозволяє записати просторову густину фізичної величини (маса, заряд, сила, інтенсивність джерела тепла, світла, тощо), зосередженої або прикладеної в певній точці простору. Вона знадобилась Діраку, щоб мати точні позначення, які б дозволяли оперувати з нескінченностями. Він розглядав δ -функцію як функцію дійсної змінної x , яка має нульове значення повсюди, за винятком малого проміжку ε , всередині якого знаходиться точка $x = 0$, причому всередині цього проміжку функція настільки велика, що інтеграл від неї на проміжку дорівнює одиниці. Точна поведінка функції всередині цього проміжку несуттєва, припускається тільки, що вона не змінюється там дуже швидко.

Уявлення про δ -функцію дає наступний приклад. Розглянемо функцію

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in (-\infty; -\frac{1}{n}) \cup (\frac{1}{n}; +\infty), n \in N, \\ n^2 x + n, & \text{ якщо } x \in [-\frac{1}{n}; 0], \\ n - n^2 x, & \text{ якщо } x \in [0; \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Тоді $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(x) dx = 1$ для $\forall n \in N$.

При $n \rightarrow +\infty$ основа $BC \triangle ABC$ прямує до нуля, а його висота до $+\infty$ і перейшовши до границі при $n \rightarrow +\infty$ отримаємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \delta(x)$.

Функції $\varphi_n(x)$ називають дельта-подібними. Саме одна з теорій δ -функцій і виходить з таких дельта-подібних функцій. Прикладами дельта-подібних функцій, границями яких є $\delta(x)$ є наступні функції:

3. $\varphi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2 x^2)}$,
4. $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$,
5. $\varphi_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$, де $\alpha > 0$ – параметр.

Неважко безпосередньо перевірити, що $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(x) = \delta(x)$ у першому прикладі, і $\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \varphi_\alpha(x) = \delta(x)$ у другому і третьому прикладах.

Так, для першої функції

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} = \begin{cases} 0, & \text{ якщо } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{ якщо } x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha dx}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{\alpha dx}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} = |\alpha x = t, \alpha dx = dt| = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^{ab} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} (\operatorname{arctg} ab - \operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1, \quad \forall \alpha > 0. \end{aligned}$$

Дірак сформулював ряд властивостей δ -функції, зокрема її основну властивість

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \delta(x) dx = \varphi(0),$$

де $\varphi(x)$ — неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$.

Цю рівність можна приймати як символічний запис δ -функції, яка ставить у відповідність кожній неперервній на $\mathbb{R}$ функції $\varphi(x)$ число $\varphi(0)$. Таким чином, функція $\delta(x)$ є функцією, аргументами якої є множина згаданих функцій $\varphi(x)$, тобто $\delta(x)$ можна розглядати як функціонал і основну властивість δ -функції коротко можна записати так: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Це значно спрощує доведення її властивостей. Цю основну властивість δ -функції називають фільтруючою.

Наведемо деякі інші властивості $\delta(x)$.

$$1. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(a).$$

Ця властивість узагальнює основну властивість і зводиться до неї підстановкою $x-a=t$.

$$2. \quad \delta(-x) = \delta(x), \text{ тобто } \delta\text{-функція парна.}$$

$$\text{Справді, } \delta(-x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2(-x)^2)} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} = \delta(x).$$

$$3. \quad x \delta(x) = 0.$$

$$\text{Дійсно, } x \delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{x \alpha}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{x}{\pi(1/x^2 + \alpha^2)} = 0.$$

$$4. \quad \delta\text{-функція диференційовна:}$$

$$\delta'(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2\alpha^3 x}{\pi(\alpha^2(x^2 + \frac{1}{2\alpha^2}))^2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

$$5. \quad x \delta'(x) = -\delta(x).$$

$$\text{Справді, } -\delta(x) = -\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \delta'(x) &= x \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2\alpha^3 x}{\pi(1+\alpha^2 x^2)^2} \right) = -\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{6\alpha^3 x^2}{4\pi\alpha x^2(1+\alpha^2 x^2)} \right) = -\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{3\alpha}{2\pi(1+\alpha^2 x^2)} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \neq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Позначимо } \Theta(x) \text{ так звану функцію Хевісайда } \Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Тоді } \Theta'(x) = \delta(x).$$

Дійсно, $\Theta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \alpha x \right)$,

$$\Theta'(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \alpha x \right)'_x = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\pi(1+\alpha^2 x^2)} = \delta(x).$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \cdot \varphi(x) dx = -\varphi'(0).$$

Дійсно, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(x) \cdot \delta(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot \varphi'(x) dx = 0 - \varphi'(0) = -\varphi'(0)$.

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(x) \cdot \varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Це узагальнення формули 7.

$$8. \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}.$$

$$9. \delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}.$$

$$10. \delta((x-a)(x-b)) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x-b)}{|a-b|}.$$

$$11. \delta(\sin \pi x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-n).$$

$$12. f(x) \cdot \delta(x-a) = f(a) \cdot \delta(x-a).$$

Формули 9 – 13 можна отримати, виходячи з означення $\delta(x)$ як границі δ –подібних функцій.

δ –функція має широкі застосування у математиці і фізиці. Покажемо це на таких прикладах.

$$a. \text{ Відомо, що } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Цю рівність можна записати у вигляді } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

Розглянемо розклад функції $\delta(t)$ на відріzkі $[0, 2\pi]$ у ряд Фур'є. Будемо мати:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \sin 0 = 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(t) \cos 0t dt = \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi};$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cos 3t + \dots \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nt = -\frac{1}{2} + \pi \delta(t).$$

$$\text{При } t = \frac{\pi}{2} \text{ маємо } \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Продиференціюємо останню рівність по } t: -\sum_{n=1}^{\infty} n \sin nt = \pi \delta'(t).$$

Помножимо обидві частини одержаної рівності на t :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nt \sin nt = -\pi t \delta'(t) = \pi \delta'(t) \quad (\text{використали формулу } t \delta'(t) = -\delta(t)).$$

Проінтегруємо отриману рівність у межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} nt \sin nt dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} nt \sin nt dt = \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} - \frac{\pi}{2} \cos n \frac{\pi}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

тобто за допомогою $\delta(x)$ отримали той же результат!

Функція Дірака широко застосовується у теоретичній фізиці, теорії диференціальних рівнянь. Так, для електричного кола, у якому послідовно включені опір R , котушка з індуктивністю L , конденсатор ємності C і джерело електро-рушійної сили $E = E(t)$, яке включається у момент часу $t = 0$, величина струму описується диференціальним рівнянням [8, с. 6-7]

$$L I'' + R I' + \frac{I}{C} = E_0 \delta(t),$$

[8, с. 6-7]. Це рівняння точніше описує реальну модель, ніж класичне рівняння, у якого ліва частина дорівнює E_0 .

Рівняння $x'(t) = 0$ у класі узагальнених функцій має загальний розв'язок $x(t) = C$, де C – довільна стала [8, с. 19].

Рівняння $t x'(t) = 0$ у класі узагальнених функцій має загальний розв'язок $x(t) = C \delta(t)$, де C – довільна стала [8, с. 20].

Рівняння $t^2 x'(t) = 0$ у класі узагальнених функцій має загальний розв'язок $x(t) = C_1 + C_2 \theta(t) + C_3 \delta(t)$, де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Багато прикладів застосування функції Дірака можна знайти у монографіях Ландау Л.Д. і Ліфшиця Є.М. «Квантова механіка», т. 3 [9, с. 32, 64, 188, 592] і «Теорія поля» [10, с. 50, 100, 331].

Висновки. Таким чином, наука про функції невинно розвивається. З'являються нові екзотичні функції, необхідні не лише для потреб математики, а і для інших наук. Історія розвитку математики показує, що цей процес нескінченний. У даній статті описані основні властивості і застосування функцій Діріхле, Рімана, Кантора, Вейєрштрасса і Дірака.

Література.

1. Математический энциклопедический словарь// Гл. ред. Прохоров Ю.В. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
2. Пуанкаре А. О науке. / А.Пуанкаре – М.: Наука, 1983. – 561 с.
3. Ляшко И.И. Математический анализ в примерах и задачах, ч. 1. / И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач – К.: Вища школа, 1975. – 680 с.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. / И.П.Натансон – М.: Наука, 1957. – 552 с.
5. Очан Ю.С., Сборник задач по математическому анализу. / Ю.С.Очан, – М.: Просвещение, 1981. – 271 с.
6. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. / Р.Рихтмайер : Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 486 с.
7. Кужель О.В. Конкретні приклади в математиці. / О.В.Кужель – К.: Радянська школа, 1988. – 96 с.
8. Власенко В.Ф. Неперервність, монотонність, диференційованість / В.Ф. Власенко // Вісник Сумського національного аграрного університету. Механізація та автоматизація виробничих процесів. Вип. 12, 2004, С. 122-127.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции и их применение / В.С.Владимиров // Математика, кибернетика, № 1, 1990. – М.: Знание. – 48 с.
10. Ландау Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория), т. 3. / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – М.: Наука, 1989. – 769 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Нефедченко В.Ф., Юнда А.М.

Постановка проблеми в загальному вигляді. У роботі розглядається модель і наводяться основні співвідношення, на основі яких зроблена спроба отримати точний вираз для середнього локального дипольного магнітного поля, що враховує не тільки параметри системи, але й анізотропію розподілу частинок у просторі.

Причиною появи далекого магнітного порядку є обмінна взаємодія, однак і магніто-дипольна взаємодія також може виконувати цю роль. Клас систем, у яких магніто-дипольна взаємодія структурних елементів відіграє основну роль, включає також системи однодомених феромагнітних частинок, випадково розподілених у немагнітній твердій матриці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Предметом дослідження є системи однодомених феромагнітних частинок, випадково розподілених у немагнітній твердій матриці. При розгляді таких систем припустимо, що частинки одноосні та з деякою імовірністю займають вузли просторової решітки. Будемо також вважати, що взаємодія між частинками системи є магніто-дипольна.

Однодоменні феромагнітні частинки можна охарактеризувати за допомогою магнітного моменту $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$. Рух вектора $\mathbf{m}$ без урахування дисипації описується за допомогою рівняння Ландау-Лифшиця [1]

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma_e \mathbf{m} \times \mathbf{H}_e, \quad (1)$$

де $\gamma (>0)$ – гіромагнітне відношення, розглянуте як феноменологічний параметр, що характеризує колективний рух магнітних моментів у магнітному матеріалі;

$\mathbf{H}_e$ – ефективне магнітне поле, що діє на магнітний момент.

Магнітне поле $\mathbf{H}_e$ являє собою похідну від повної енергії магнітного матеріалу і визначається виразом:

$$\mathbf{H}_e = -\partial W / \partial \mathbf{m}.$$

Магнітна енергія частинки [2, 3] згідно з обраною нами моделлю має такий вигляд:

$$W = -(\mathbf{H}_a/2)\mathbf{m} - \mathbf{H}(t)\mathbf{m}, \quad (2)$$

де $\mathbf{H}_a$ – поле магнітної анізотропії; $\mathbf{H}(t)$ – середнє дипольне магнітне поле, що діє на довільно виділену частинку (на початку координат) з боку інших.

Частіше за все дисипацію енергії враховують шляхом введення у (1) релаксаційного доданка в формі Гільберта:

$$\dot{\mathbf{m}} = -\gamma_e \mathbf{m} \times \mathbf{H}_e + \left(\frac{\alpha}{m} \right) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}, \quad (3)$$

де α – параметр загасання Гільберта.

Якщо замість α ввести параметр дисипації λ і врахувати теплове магнітне поле, тоді одержимо рівняння Ландау-Ліфшиця