

УДК 519.330.115

Баталова А.Ю., старший преподаватель, кафедра высшей математики

Национальный аграрный университет, г. Сумы, Украина

E-mail: allabatalova@yandex.ru

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В МОДЕЛИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Изучение факторов, способствующих стабильности циклов производства и загрязнения, является важной проблемой эколого-экономической футурологии.

В настоящее время большое распространение получают способы химической защиты масличных культур с использованием инсектицидов и гербицидов, поэтому сельскохозяйственное производство в Украине теперь более негативно влияет на окружающую среду, чем несколько десятилетий назад. Это является следствием необоснованного, технологически регламентированного использования минеральных удобрений и ядохимикатов, а также бесхозяйственного их хранения и транспортировки.

Рассматривается производство, приносящее капитал $x(t)$, которое вызывает загрязнение $y(t)$. Часть капитала $\beta x(t)$ используется для уменьшения загрязнения, другая часть $\alpha x(t)$ идет на потребление, где $\alpha + \beta < 1$

Вводится коэффициент падения объема капитала a и принимается, что расход единицы капитала на очистку среды вызывает уменьшение загрязнения на величину $by(t)$, а расход единицы продукции уменьшает уровень загрязнения на d единиц. Тогда скорость роста основного капитала и загрязнения можно описать такой системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = (1 - \alpha - \beta) f(x) - ax - \gamma y \equiv f_1, \quad \dot{y} = (1 - \beta d) f(x) - by \equiv f_2, \quad (1)$$

где γ является коэффициентом уменьшения капитала, вызываемое единицей загрязнения. Все параметры и фазовые координаты положительные и безразмерные величины. Анализ полученной модели выполняется в условиях стационарного решения системы x_c, y_c , которое получается из системы

уравнений $f_k=0$, $k=1,2$:

$$x_c = \frac{ab}{Q}, \quad y_c = \frac{(1-\beta d)a^2b}{Q^2}, \quad Q = b + d\gamma\beta - (\alpha + \beta)b - \gamma > 0, \quad db < 1.$$

Дальнейший анализ выполняется для квадратичной зависимости: $f(x)=x^2$. После замены переменных $x=\xi+x_c$, $y=\eta+y_c$ система уравнений (1) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{cases} = M \begin{cases} \xi \\ \eta \end{cases} + \begin{cases} (1-\alpha-\beta)\xi^2 \\ (1-\beta d)\xi^2 \end{cases}, \quad M = \begin{pmatrix} 2(1-\alpha-\beta)x_c - a & -\gamma \\ 2(1-\beta d)x_c & -b \end{pmatrix} \quad (2)$$

Далее находятся собственные значения матрицы M и собственные векторы. При этом ставится задача - найти условия, при которых система (2) имеет периодическое решение как первый шаг к ограничению загрязнения. Это произойдет тогда, когда собственные значения будут чисто мнимыми

Находим значение параметра a : $a_g = \frac{bQ}{2(1-\alpha-\beta)b-Q}$. При таком значении параметра собственные значения матрицы M становятся чисто мнимыми и в системе могут возникнуть периодические колебания с частотой:

$$\omega^2 = b^2 \left(\frac{2\gamma(1-\beta d)}{2(1-\alpha-\beta)b-Q} - 1 \right).$$

Поскольку частота - величина положительная, то отсюда следует дополнительное условие существования периодического режима загрязнения: значение дроби в скобках должно быть больше единицы.

Затем проводится анализ нелинейной части системы, что дает аналитическое выражение для критерия устойчивости периодических колебаний, малого функционального параметра и элементов, из которых формируется приближенное аналитическое решение, выраженное через тригонометрические функции. В частности, критерий устойчивости сводится к выполнению неравенства: $b(\alpha + \beta) + \gamma > b + \gamma bd$.

Итак, в работе показано, что при определенных значениях параметров можно обеспечить устойчивый предельный цикл одновременно для процесса производства и размеров загрязнения окружающей среды.