

А.Б. Баталова, ст. викладач
Сумський національний аграрний університет
Україна

ФОРМУВАННЯ МОТИВАЦІЇ НАВЧАННЯ НА ПРИКЛАДІ ВИВЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В процесі навчання для поліпшення його ефективності велику роль відіграє мотивація.

Студенти інженерних, економічних та інших спеціальностей, які вивчають курс вищої математики, не завжди мають уявлення про необхідність вивчення деяких його розділів.

Для того, щоб подолати проблеми подібного роду і стимулювати мотивацію, необхідно при вивченні різних тем демонструвати застосування досліджуваного матеріалу на практиці. При вивченні теми «диференціальні рівняння» це зробити дуже просто.

Почати можна з моделі природного росту.

У природі і суспільстві зустрічаються численні процеси, в ході яких деякі величини змінюються в одне і те ж число разів протягом будь-якого проміжку часу Δt .

Якщо взяти масу $m(t)$ колонії бактерій, то за рівні проміжки часу t маса колонії буде зростати в одне і те ж число разів за умови, що немає обмежень у кількості поживних речовин і об'єму посуду, при цьому відсутні живі істоти, що поїдають ці бактерії.

Аналогічно складатимуться справи в будь-якій сукупності живих істот, за умови відсутності обмежень в їжі, просторі та наявних ворогів.

Такі процеси називають процесами природного росту.

У банківській справі сума грошового вкладу за даний проміжок часу зростатиме в одне і те ж число разів і також підпорядкована закону природного росту.

При розпаді ядер під час ланцюгової реакції утворюються нейтрони. Чим більше вільних нейтронів в даному об'ємі, тим частіше вони стикаються з ядрами і тим більше нових нейтронів з'являється. Процес збільшення кількості вільних нейтронів також представляє собою процес природного росту.

А тепер розглянемо величину $y(t)$, яка змінюється в однакове число разів не протягом проміжку Δt , а миттєво, то ми приходимо до процесу, при якому швидкість зміни величини $v(t)$ в момент часу t пропорційна значенню цієї величини в той же момент часу.

Тоді рівняння, що описує цей процес, можна записати так:

$$v(t) = ky(t). \quad (1)$$

Так як $v(t) = y'(t)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'(t) = ky(t). \quad (2)$$

Це рівняння називають диференціальним рівнянням природного росту. Вперше його отримав Якоб Бернуллі при вирішенні задачі про кредитування:

Нехай позикодавець платить кредитору $r\%$ відсотків від зайнятої суми y_0 за рік.

Скільки він повинен платити за рік на кожну одиницю зайнятої суми, якщо відсотки зростають безперервно?

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння.

Розділяючи змінні в рівнянні

$$y' = ky, \text{ маємо } \frac{dy}{y} = kdt. \quad (3)$$

Проінтегрувавши праву і ліву частини $\int \frac{dy}{y} = \int kdt$, отримаємо $\ln y = kt$.

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y(t) = C \cdot e^{kt}. \quad (4)$$

Т. Мальтус в 1798г використав це саме рівняння для прогнозування росту населення Землі [1].

Постійна k в його рівнянні, яке використовується в соціальних і біологічних науках, називається мальтузіанським коефіцієнтом лінійного росту.

Розв'язком рівняння є експоненціальна функція, яка дуже швидко зростає.

Якщо t зростає в арифметичній прогресії, то відповідне значення e^{kt} утворює геометричну прогресію, де $q = e^{kt}$.

Оскільки $k > 0$, то $q > 1$. Отже $e^{kt} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Відповідно до моделі Т. Мальтуса кількість населення Землі росте дуже швидко. Говорячи про зростання населення, вчені вживають термін «демографічний вибух». Цей термін цілком доречний, оскільки зростання населення описується тим же диференціальним рівнянням, що і ядерний вибух. (Число розпаду ядра при ланцюговій реакції росте експоненціально, настільки ж швидко виділяється енергія: $y(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.)

Використовуючи це ж рівняння, можна також вивести закон росту випуску дефіцитної продукції в умовах ненасиченості ринку.

Експоненціальна функція $y(t) = C \cdot e^{kt}$ показує як швидко можна домогтись величезних обсягів випуску дефіцитної продукції, якщо постійно направляти частину доходів в розширення виробництва.

Ми розглянули приклади різних процесів, математичною моделлю яких служить рівняння виду $y'(t) = ky(t)$.

Показуючи можливості застосування диференціальних рівнянь в різних сферах науки та техніки, можна забезпечити посилення мотивації навчального процесу та істотно вплинути на засвоєння студентами даного розділу вищої математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мальтус Т. Р. Дослідження закону народонаселення. – Київ: Основи, 1998. – 538 с.