

Баталова А.Б.

старший викладач

Національний аграрний університет

м. Суми

РОЗГЛЯД ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАБРУДНЕННЯ ДОВКІЛЛЯ

Будь-які додаткові вкладення керівники підприємств прагнуть направити у виробництво. Тому зростає розрив між виробничими потужностями і системами природоохоронної інфраструктури. В умовах становлення ринкових стосунків, загальної кризи і спаду виробництва посилюються колишні екологічні проблеми і зростають нові.

Щоб запобігти цьому слід окремо з'ясувати рівень виробництва і викликаного ним забруднення, знайти модель, яка сприяє стабільності циклів виробництва і забруднення.

Хоча ідея нульового росту економіки, висунута в свій час Римським клубом [1], була відкинута, але вона має високу ймовірність бути затребуваною в майбутньому. Тому доцільно моделювати якщо не стаціонарні моделі розвитку спільноти, що заселяє планету земля, то хоча б коливні моделі, виробництво і забруднення в яких коливається в певних межах. Вивчення факторів, які сприяють стабільності циклів виробництва і забруднення, є важливою проблемою еколого-економічної футурології.

Розглядається виробництво, яке приносить капітал $x(t)$ і викликає забруднення $y(t)$. Частина капіталу $\beta x(t)$ використовується для його зменшення, інша частина $\alpha x(t)$ іде на споживання, де $\alpha + \beta < 1$.

Вводиться коефіцієнт падіння об'єму капіталу a і приймається, що витрата одиниці капіталу на очищення середовища викликає зменшення забруднення на величину $by(t)$, а витрата одиниці продукції зменшує рівень забруднення на d одиниць. Тоді швидкість росту основного капіталу і

забруднення можна описати такою системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = (1 - \alpha - \beta) f(x) - ax - \gamma y \equiv f_1, \quad \dot{y} = (1 - \beta d) f(x) - by \equiv f_2, \quad (1)$$

де γ є коефіцієнтом зменшення капіталу, що викликається одиницею забруднення. Всі параметри і фазові координати додатні і безрозмірні величини. Аналіз одержаної моделі виконується в околі стаціонарного розв'язку системи x_c, y_c , який одержується з системи рівнянь $f_k=0, k=1,2$:

$$x_c = \frac{ab}{Q}, \quad y_c = \frac{(1 - \beta d)a^2 b}{Q^2}, \quad Q = b + d\gamma\beta - (\alpha + \beta)b - \gamma > 0, \quad db < 1.$$

Подальший аналіз тут виконується для квадратичної залежності: $f(x)=x^2$. Після заміни змінних $x=\xi+x_c, y=\eta+y_c$ система рівнянь (1) зводиться до наступної:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} = M \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (1 - \alpha - \beta)\xi^2 \\ (1 - \beta d)\xi^2 \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2(1 - \alpha - \beta)x_c - a & -\gamma \\ 2(1 - \beta d)x_c & -b \end{pmatrix} \quad (2)$$

Далі знаходяться власні значення матриці M і власні вектори. При цьому ставиться завдання - знайти умови, при яких система (2) має періодичний розв'язок як перший крок до обмеження забруднення. Це станеться тоді, коли власні значення будуть суто уявними. Для цього потрібно знайти таке значення одного з параметрів, при якому матриця M обертається в нуль:

$$2(1 - \alpha - \beta)x_c - a - b = 0.$$

Звідси знаходимо біфуркаційне значення параметра a :

$$a_s = \frac{bQ}{2(1 - \alpha - \beta)b - Q}.$$

При такому значенні параметра власні значення матриці M стають суто уявними і в системі можуть виникнути періодичні коливання з частотою:

$$\omega^2 = b^2 \left(\frac{2\gamma(1 - \beta d)}{2(1 - \alpha - \beta)b - Q} - 1 \right).$$

Оскільки частота - величина додатна, то звідси негайно впливає додаткова умова існування періодичного режиму забруднення: дріб в дужках повинен бути більшим одиниці.

Далі виконується перетворення системи (2) до канонічного вигляду і проводиться аналіз нелінійної частини системи, що дає аналітичний вираз для критерію стійкості періодичних коливань, малого функціонального параметру і елементів, з яких формується наближений аналітичний розв'язок, виражений через тригонометричні функції. Зокрема, критерій стійкості зводиться до виконання нерівності:

$$b(\alpha + \beta) + \gamma > b + \gamma d.$$

Знайдено умови, при яких рівень виробництва і викликаного ним забруднення змінюються періодично, утворюючи стійкий граничний цикл. Одержано наближений періодичний розв'язок моделі.

ЛІТЕРАТУРА.

1. Медоуз Д.Х., Медоуз Д.Л. и др.. Пределы роста. Изд.-во Московского университета. 1991.- 206с.