

**РОЗВИНЕНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ СТАЛЕВИХ РОЗКРІПЛЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА СТІЙКІСТЬ ПРИ СУМІСНІЙ ДІЇ ПОПЕРЕЧНОГО ЗГИНУ ТА КРУЧЕННЯ****Гудзь С.А.**, к.т.н., доцент

goods.sergiy@gmail.com ORCID 0000-0002-4764-8635

*Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»***Гасій Г.М.**, д.т.н., доцент

grigorium@gmail.com ORCID 0000-0002-1492-0460

*Сумський національний аграрний університет***Дарієнко В.В.**, к.т.н., доцент

vvdarienko@gmail.com ORCID 0000-0001-9023-6030

*Центральн український національний технічний університет*

**Анотація.** Розглянуто основні етапи розрахунку сталевих розкріплених згинаних елементів із початковими недоскональностями за деформованою схемою. Розкріплення може відбуватися за допомогою приєднаних до сталеві балки конструкцій. На основі нового підходу до аналізу внутрішніх силових факторів було поставлено за мету знайти та описати особливості експлуатації балки при сумісній дії поперечного згину та кручення. Удосконалено існуючу теоретичну модель при усуненні присутніх у ній недоліків. На прикладах проведено порівняння методик визначення несучої здатності за стійкістю гнучких елементів. Запропоновано збільшити економію матеріалу шляхом деталізації розрахунку.

**Ключові слова:** бімомент, викривлення, втрата стійкості, кручення, розкріплення.

**Вступ.** Унаслідок ексцентричного прикладення навантаження у сталевих елементах різного призначення з відкритим поперечним перерізом з'являються деформації обмеженого кручення, що призводять до відповідних додаткових напружень, названих секторіальними. Проблема врахування цих напружень тісно пов'язана з таким явищем як «згинально-крутильна форма втрати стійкості», котру для балок прийнято називати «поперечно-крутильна форма втрати стійкості». В цьому контексті існує суперечність, на яку слід звернути увагу і яка полягає у невідповідності роботи розкріпленої конструкції більшості класичних теоретичних уявлень про обмежене кручення тонкостінних стрижнів. Значна кількість математичних моделей характеризує лише деякі особливості поведінки конструкції у складі каркасу. У таких випадках дійсні процеси не завжди відображаються при моделюванні, яке не відповідає реальній картині напружено-деформованого стану. Ступінь використання поперечного перерізу за напруженнями, необхідний для забезпечення надійності конструкції загалом, потребує уточнення для його адекватного відображення. Внутрішні зусилля потрібно визначати за нелінійною теорією другого порядку для збільшення точності розрахунків і наближення їх до дійсних умов роботи конструкції. Вона являє собою по суті розрахунок за деформованою схемою, в якому рівняння рівноваги записуються для деформованого стану системи, враховуючи геометричну нелінійність.

**Огляд останніх джерел досліджень і публікацій.** Сучасні експериментально-теоретичні дослідження напружено-деформованого стану і стійкості тонкостінних сталевих балок, без розкріплення і з розкріпленням, представлені в роботах [1, 2] та працях інших дослідників. До основних джерел, де зазначено результати досліджень кручення та стійкості балок, можна віднести роботи представників німецької класичної технічної школи [3, 4, 5]. Застосування енергетичного методу до задач стійкості отримало бурхливий розвиток у теперішній час і супроводжується реалізацією обчислювальних методів на комп'ютері [6]. Визначення еквівалентних навантажень на стабілізуючі конструкції приводиться в дисертації [7] та статті [8]. Розрахунок балок при згині та крученні за одним із варіантом теорії другого порядку присвячено роботу [9]. Дану тематику розкрито також у статті [10].

**Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми.** Не розв'язаною раніше частиною загальної важливої проблеми є виділення тих моментів, на які потрібно звертати увагу при розрахунку розкритих елементів, особливо прогонів легкої похилої покрівлі, для відповідності побудованої моделі дійсній роботі балок при складному опорі. Відчутної економії можна досягти внаслідок урахування зменшення впливу скатної складової навантаження на напруження від згину за рахунок наявності розкриття.

**Постановка мети і задач досліджень.** Складність математичного описання функції згинально-крутильного бімоменту часто призводить до спрощень і аналітичних помилок у процесі визначення внутрішніх зусиль, які залежать від функції кута закручування стрижня. Тому на основі набутого досвіду в частині аналізу внутрішніх зусиль із урахуванням особливостей умов роботи конструкції з недосконаlostям при сумісній дії поперечного згину та кручення було вирішено уточнити модель визначення несучої здатності розкритих сталевих елементів різного перерізу. Потребують подальшого теоретичного дослідження та вирішення задачі виявлення причин і наслідків виникнення кручення, вивчення природи його появи та способів контролю або мінімізації.

**Основний матеріал і результати.** При безперервному бічному розкритті з певною жорсткістю на зсув верхній пояс зміщується від зовнішнього і еквівалентного навантажень. Деформація верхнього поясу виникає внаслідок податливості кріплення. Взятши за основу положення теорії другого порядку і змінену модель стиснутого стрижня з урахуванням розподілу згинального моменту в балці, було отримано спрощений вираз для визначення максимального зміщення верхнього поясу закріпленої настилом балки  $v_{oc,m}$ , який призводить до незначного завищення результатів, що йде в запас міцності, але є простим у застосуванні. Податливість кріплення верхнього поясу може бути врахована наближено через прийняття на вихідній стадії розрахунку початкового викривлення балки, зміненого на величину максимального зміщення верхнього поясу, яке включає деформації балки під навантаженням і надалі може визначатися поступовим наближенням до потрібного значення із заданою точністю. В уточненій формулі EN 1993-1-1 (1) при зменшенні викривлення за абсолютною величиною використовується знак «+», при збільшенні за рахунок малої скатної складової або при додатному поперечному викривленні – знак «-»:

$$\bar{v}_{0,m} = v_{0,m} + v_{oc,m} \approx v_{0,m} + \frac{-M_z + N_{Ed} v_{0,m}}{S \pm N_{Ed}}, \quad (1)$$

де  $v_{0,m}$  – максимальне початкове викривлення балки, котре визначається залежно від виду кривої викривлення, перерізу і прольоту балки, а також виду розрахунку ( $e_0$  відповідно до позначень EN 1993-1-1), при спрямуванні викривлення проти напрямку осі  $y$  його величина прийнята за логікою від'ємною;

$$N_{Ed} = \frac{C_d M_y}{h_z} - \text{поздовжня стискувальна сила у верхньому поясі балки з урахуванням}$$

розподілу згинального моменту в балці (для рівномірно розподіленого навантаження за власними розрахунками при прийнятті кривої початкового викривлення за квадратну параболу  $C_d = 0,833$ , або згідно з [7] при прийнятті кривої початкового викривлення за синусоїду  $C_d = 0,885$ ;  $h_z$  – відстань по висоті між центрами ваги поясів балки);

$S$  – зсувна жорсткість розкриття (профільованого настилу) на одну балку.

Важливішим варіантом напрямку початкового викривлення є той випадок, при якому воно призводить до не вигідного збільшення крутного навантаження, тобто для розкритого швелера спрямоване вгору по схилу проти напрямку осі найменшої жорсткості та має від'ємний знак. Додатне початкове викривлення призводить до зменшення загального крутного навантаження при такій розрахунковій схемі та менших загальних напружень, що є менш небезпечним випадком розрахунку, проте є також актуальним для розкритої двотаврової балки при відсутності ексцентриситету і перекосу переважаючої складової поперечного навантаження (в площині найбільшої жорсткості профілю).

Напружено-деформований стан попередньо викривленої і закрученої тонкостінної балки, завантаженої рівномірно розподіленим поперечним навантаженням у двох площинах, з урахуванням закріплення балки від поперечних зміщень, а також висоти прикладення навантаження у загальному вигляді можна описати за допомогою просторової моделі для опису стабілізуючих еквівалентних навантажень із поширеною системою диференціальних рівнянь рівноваги стрижня, взятої з роботи [7] (без впливу поздовжньої сили, також система відрізняється додаванням частини другого рівняння, що описує кручення балки, котре залежить від місця прикладення скатної складової навантаження):

$$\begin{cases} EI_z v^{IV} + (M_y (\vartheta_0 + \vartheta))'' = q_y, \\ EI_\omega \vartheta^{IV} - GI_\omega \vartheta'' + c_\vartheta \vartheta + q_z z_p (\vartheta_0 + \vartheta) + M_y (v_0 + v)'' + q_y y_p (\vartheta_0 + \vartheta) = m_x, \end{cases} \quad (2)$$

де  $\vartheta_0, v_0$  – початкові кут закручування і викривлення балки;

$\vartheta, v$  – кут закручування і викривлення балки під навантаженням,

$E, G$  – модулі пружності та зсуву відповідно,

$I_z, I_\omega$  – момент інерції відносно осі  $z$  і секторіальний момент інерції перерізу балки,

$I_t$  – момент інерції перерізу при вільному крученні,

$c_\vartheta$  – крутильна жорсткість розкріплення (профільованого настилу),

$z_p, y_p$  – координати точки прикладення навантаження відносно центра згину балки, при прикладенні переважаючої складової поперечного навантаження до верхнього поясу  $z_p \approx -0,5h_z$ , для швелера при прикладенні скатної складової навантаження в місці кріплення профільованого настилу до прогону в рівні верхнього поясу по центру ваги перерізу  $y_p \approx -(e - 0,5t_w + e_y)$ , де  $e$  – відстань від центра стінки до центра згину,  $t_w$  – товщина стінки балки,  $e_y$  – відстань по осі  $y$  від центра ваги  $C$  до лівої грані стінки (таблична величина);

$q_z, q_y$  – рівномірно розподілені поперечні навантаження, що діють вздовж осі  $z$  і  $y$  відповідно (для прогону – проекції розрахункового рівномірно розподіленого навантаження  $q$  на вісь  $z$  і  $y$ :  $q_z = q \cos \alpha$ ,  $q_y = q \sin \alpha$ , де  $\alpha$  – кут нахилу перерізу), при збігові напрямку дії навантаження з напрямком осі знак приймається додатний,

$m_x$  – рівномірно розподілене кругле навантаження відносно центра згину з урахуванням правила знаків при крученні ( $m_x = q_z e_z - q_y z_p = q_z e_z + 0,5q_y h_z$ , де  $e_z$  – плече навантаження  $q_z$ , яке для швелерної балки може прикладатися посередині ширини полицьки  $b_f$  або посередині стінки в рівні верхнього поясу,  $e_z = -(e - 0,5t_w + 0,5b_f)$ , або  $e_z = -e$ , що до кінця не з'ясовано, проте перший варіант призводить до збільшення запасу міцності балки).

Додаткові деформації закручування виникають від згинального моменту в площині найменшої жорсткості, який довантажує прогнуту балку в зворотну сторону від дії податливості з нерівномірним по довжині ексцентриситетом, рівним сумі її розрахункового прогину  $w$  та початкового прогину  $w_0$  (див. рис. 1). Цим чинником ( $M_z(w_0 + w)''$ ) за великим рахунком можна знехтувати, як було зроблено в [7, 8], оскільки він не суттєво впливає на кінцевий результат, але дозволяє підвищити його точність. Оскільки прогин та викривлення балки незалежні одне від іншого, систему записують без рівняння, що описує прогин балки.

$$EI_y w^{IV} + (M_z (\vartheta_0 + \vartheta))'' = q_z, \quad (3)$$

де  $I_y$  – момент інерції перерізу балки відносно осі  $y$ .

Знаючи деформації  $\vartheta, v$  та похідні від них, можна за допомогою рівнянь системи встановити внутрішні зусилля, необхідні для визначення несучої здатності елемента. При зміні згинального моменту по довжині балки диференціальне рівняння задачі сумісної дії поперечного згину і кручення не має замкнутого відносно простого розв'язку.



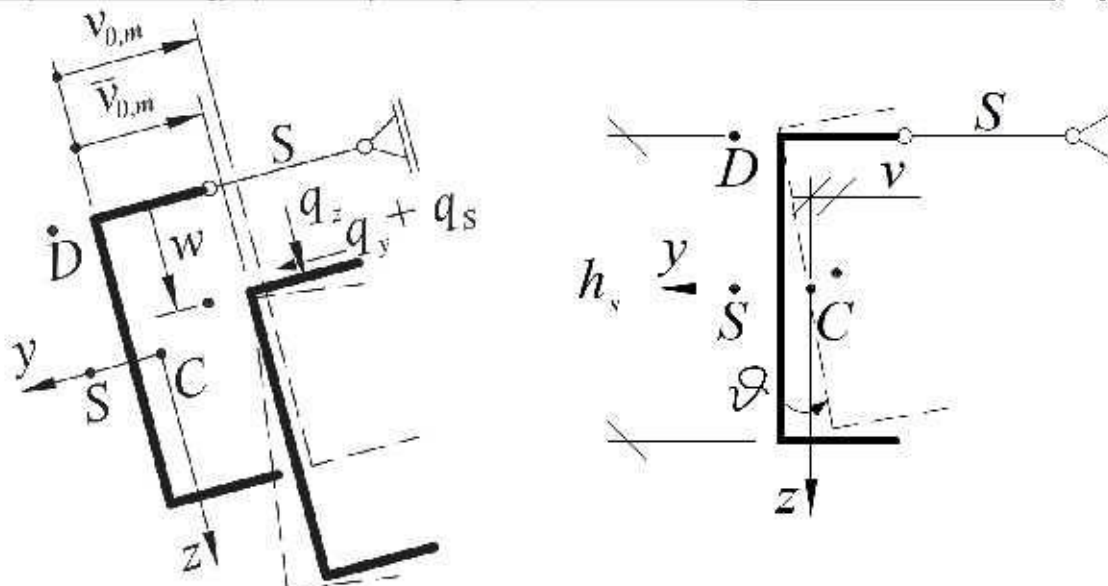


Рис. 1. Навантаження та деформації для розкріпленої швелерної балки, взаємозв'язок лінійних і кутових деформацій

Вважається, що при достатній зсувній жорсткості розкріплення стиснутий пояс практично повністю закріплений від поперечних зміщень і вісь обертання, котру в цьому випадку називають зв'язаною, розташовується над центром згину на рівні верхньої полицки елемента. При введенні передумови існування в балці зв'язаної осі обертання за рахунок наявності достатньої зсувної жорсткості приєднаних конструкцій деформації  $v$  та  $\vartheta$  вже не є незалежними одна від іншої. Тому можна ввести спрощення, справедливе при малих кутах закручування (знак « $\rightarrow$ » передбачає закріплення в площині верхнього поясу, лінійна деформація відраховується від центра ваги – рис. 1).

$$v = -\frac{h_s}{2} \vartheta \quad (4)$$

При безперервному бічному закріпленні з певною жорсткістю на зсув верхній пояс все-таки дещо зміщується від навантаження в площині найменшої жорсткості. Якщо врахувати зміщення верхнього поясу балки  $v_{oc}$ , що виникло внаслідок податливості кріплення, у формі синусоїди, то замість викривлення  $v$  слід застосовувати його змінене сумарне значення:

$$\bar{v} = v + v_{oc} = v + v_{oc,m} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

Навантаження  $q_z$  і  $q_y$  передаються на балку через приєднані до верхнього поясу конструкції. Щоб знайти необхідні деформації застосуємо для балки з прикладеним в рівні верхнього поясу поперечним навантаженням умову рівності нулю сумарної елементарної можливої (віртуальної) роботи на основі принципу можливих переміщень і системи диференціальних рівнянь рівноваги стрижня при відсутності початкового кута закручування балки. Виконавши попередньо заміну скатної складової навантаження на вираз із першого рівняння системи (2) і перетворення при відкритті дужок для другої похідної від добутку функцій, а також скорочення частин крутного навантаження від точки прикладення переважаючої складової поперечного навантаження, отримуємо вираз для роботи:

$$\begin{aligned} \delta W = \delta W_e + \delta W_g + \delta W_p = & - \int_0^L \left( \left( EI_z \frac{h_s^2}{4} + EI_\omega \right) \vartheta'' \delta \vartheta'' + GI_t \vartheta' \delta \vartheta' + (c_s + q_y y_p) \vartheta \delta \vartheta \right) dx - \\ & - \int_0^L (M_y h_s \vartheta' \delta \vartheta') dx + \int_0^L (V_z h_s \vartheta' \delta \vartheta') dx + \int_0^L (m \delta \vartheta) dx = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $V_z = -q_z x + q_z \frac{L}{2}$  – поперечна сила по довжині балки в напрямку осі  $z$ .

Крутне навантаження  $m$  за умови відсутності початкового прогину балки становитиме:

$$m = -M_y \bar{v}_0'' - M_z w'' + q_z e_z + EI_z v_{oc}'' \frac{h_z}{2}. \quad (7)$$

Записавши рівняння (3) у вигляді основного диференційного рівняння зігнутої осі (пружної лінії) балки у просторовій постановці  $EI_y w'' = -M_y - M_z (\mathcal{G}_0 + \mathcal{G})$  і виразивши з нього другу похідну від функції прогину, рівняння (7) за умови прийняття кривої початкового викривлення за синусоїду перепишемо у вигляді:

$$m = M_y \bar{v}_{0,m} \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + M_z \left(\frac{M_y}{EI_y} + \frac{M_z \mathcal{G}}{EI_y}\right) + q_z e_z - EI_z v_{oc,m} \frac{\pi^4}{L^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{h_z}{2}. \quad (8)$$

Якщо прийняти криву початкового викривлення за квадратну параболу, вираз для відшукування крутного навантаження буде мати вигляд:

$$m = M_y \bar{v}_{0,m} \frac{8}{L^2} + M_z \left(\frac{M_y}{EI_y} + \frac{M_z \mathcal{G}}{EI_y}\right) + q_z e_z - EI_z v_{oc,m} \frac{\pi^4}{L^4} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{h_z}{2}. \quad (9)$$

Будемо розглядати лише найпоширенішу симетричну балкову схему завантаження у вигляді рівномірно розподіленого по всій довжині навантаження. Тоді згинальні моменти по довжині балки відносно осей  $y$  і  $z$  за теорією першого порядку будуть визначатись так:

$$M_y = -\frac{q_z x^2}{2} + \frac{q_z L}{2} x, \quad (10)$$

$$M_z = \frac{q_y x^2}{2} - \frac{q_y L}{2} x. \quad (11)$$

Згідно з джерелом [3] і прийнятими спрощеннями зсувна жорсткість не виконує роботу, але призводить до появи додаткового скатного навантаження. При заміні скатної складової навантаження на вираз із першого рівняння системи (2) крутні зусилля, обумовлені зсувною жорсткістю, врівноважуються. Перше рівняння системи (2) запишеться таким чином:

$$EI_z (-0,5 h_z \mathcal{G}'' + v_{oc}'') + (M_y (\mathcal{G}_0 + \mathcal{G})) - S v_{oc}'' = q_y. \quad (12)$$

Деформований стан балки при крученні опишемо за допомогою виразу для кута закручування із трьома підібраними для зручності операцій диференціювання та інтегрування параметрами, один з яких виявиться нульовим ( $\mathcal{G}_2 = 0$ ):

$$\mathcal{G} = \sum_{j=1}^3 \mathcal{G}_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right). \quad (13)$$

Вираз із одним параметром призводить до занадто високої похибки при визначенні згинально-крутильного бімоменту, бо не відповідає його епюрі. Можливість застосування виразу з трьома параметрами, один з яких нульовий, для опису деформацій балки при крученні з достатньо високою точністю доведена у роботі [8].

Похідні від кута закручування  $\mathcal{G}'$ ,  $\mathcal{G}''$  і  $\delta\mathcal{G}$  після диференціювання будуть дорівнювати:

$$\mathcal{G}' = \sum_{j=1}^3 \mathcal{G}_j \frac{j\pi}{L} \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right), \quad (14)$$

$$\mathcal{G}'' = -\sum_{j=1}^3 \mathcal{G}_j \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right), \quad (15)$$

$$\delta\mathcal{G} = \sum_{j=1}^3 \delta\mathcal{G}_j \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right). \quad (16)$$

Після введення виразів (13) – (16) у рівняння для віртуальної роботи і виконання інтегрування стає можливим отримати матричне рівняння для визначення кута закручування з невідомими параметрами, що відшукуються методом Крамера. З огляду на громіздкість виразів при інтегруванні, яке було виконано за допомогою системи комп'ютерної алгебри Maxima, наведемо тільки кінцеві формули в табл. 1.

Таблиця 1 – Визначення кута закручування матричним способом

$$\begin{bmatrix} K_{e,11} + K_{g,11} & K_{g,13} \\ K_{g,31} & K_{e,33} + K_{g,33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{1}{\Delta} \left( (K_{e,33} + K_{g,33}) P_1 - K_{g,13} P_3 \right)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \frac{1}{\Delta} \left( (K_{e,11} + K_{g,11}) P_3 - K_{g,31} P_1 \right)$$

$$\Delta = (K_{e,11} + K_{g,11})(K_{e,33} + K_{g,33}) - K_{g,13} K_{g,31}$$

$$K_{e,11} = \left( EI_z \frac{h_z^2}{4} + EI_w \right) \frac{\pi^4}{2L^3} + GI_t \frac{\pi^2}{2L} + (c_\vartheta + q_y y_P) \frac{L}{2}$$

$$K_{e,33} = \left( EI_z \frac{h_z^2}{4} + EI_w \right) \frac{81\pi^4}{2L^3} + GI_t \frac{9\pi^2}{2L} + (c_\vartheta + q_y y_P) \frac{L}{2}$$

$$K_{g,11} = q_z L h_z \left( \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \right) + \frac{q_y^2 L^5}{EI_y} \left( \frac{1}{240} + \frac{3}{16\pi^4} \right) \quad K_{g,13} = q_z L h_z \left( -\frac{27}{32} \right) - \frac{q_y^2 L^5}{EI_y} \frac{45}{256\pi^4}$$

$$K_{g,31} = q_z L h_z \left( -\frac{3}{32} \right) - \frac{q_y^2 L^5}{EI_y} \frac{45}{256\pi^4} \quad K_{g,33} = q_z L h_z \left( \frac{3\pi^2}{8} + \frac{1}{8} \right) + \frac{q_y^2 L^5}{EI_y} \left( \frac{1}{240} + \frac{1}{432\pi^4} \right)$$

$$P_1 = q_z L v_{0,m} \left( \frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{8} \right) + q_z e_z \frac{2L}{\pi} - EI_z v_{oc,m} h_z \frac{\pi^4}{4L^3} + \frac{q_y q_z L^5}{EI_y} \left( \frac{1}{\pi^3} - \frac{12}{\pi^5} \right) \text{ (синусоїда)}$$

$$P_1 = q_z L v_{0,m} \frac{16}{\pi^3} + q_z e_z \frac{2L}{\pi} - EI_z v_{oc,m} h_z \frac{\pi^4}{4L^3} + \frac{q_y q_z L^5}{EI_y} \left( \frac{1}{\pi^3} - \frac{12}{\pi^5} \right) \text{ (парабола)}$$

$$P_3 = q_z L v_{0,m} \left( -\frac{3}{32} \right) + q_z e_z \frac{2L}{3\pi} + \frac{q_y q_z L^5}{EI_y} \left( \frac{1}{27\pi^3} - \frac{4}{81\pi^5} \right) \text{ (синусоїда)}$$

$$P_3 = q_z L v_{0,m} \frac{16}{27\pi^3} + q_z e_z \frac{2L}{3\pi} + \frac{q_y q_z L^5}{EI_y} \left( \frac{1}{27\pi^3} - \frac{4}{81\pi^5} \right) \text{ (парабола)}$$

Для визначення зміщення застосуємо до нашого випадку рівняння (12). Виконавши інтегрування, отримаємо вираз для ітераційного відшукування уточненого максимального значення деформації зміщення верхнього поясу балки за деформованою схемою з урахуванням кута закручування та напрямку дії. Беручи до уваги прийняті спрощення, формула після перетворень набуде такого вигляду:

$$v_{oc,m} = \frac{1}{S} \left( \frac{q_y L^2}{8} + \frac{q_z L^2}{8} (\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_3) + \frac{\pi^3 EI_z}{L^2} \left( \frac{h_z}{2} (\mathcal{Q}_1 - 9\mathcal{Q}_3) - v_{oc,m} \right) \right) \quad (17)$$

Розрахункові згинальні моменти  $M_y^H$ ,  $M_z^H$  відносно осі  $y$  і  $z$  за теорією другого порядку визначаються з урахуванням кута закручування стрижня і зсувної жорсткості розкріплення:

$$M_y^H = M_y + M_z \mathcal{Q}_1; \quad (18)$$

$$M_z^H = M_z - M_y \mathcal{Q}_3 + S v_{oc} \quad (19)$$

Важливо відзначити, що в дійсності розрахунковий бімомент залежить не тільки від навантаження, його ексцентриситету, пружної згинально-крутильної константи перерізу і прольоту балки, але також і від жорсткості приєднаних до балки конструкцій. Бімомент за теорією другого порядку пропорційний другій похідній від кута закручування стрижня:

$$M_a^H = -EI_w \mathcal{Q}'' \quad (20)$$



Для точного розрахунку, як відомо, потрібно детально проаналізувати напружений стан і перевірити напруження в найбільш напруженій точці перерізу балки. Найбільші абсолютні значення напружень в розгорнутій формулі варто визначати у двох протилежних крайніх точках, де виникають напруження від згину у двох площинах одного знаку. Рівняння для визначення нормальних напружень у загальному вигляді буде мати таку форму:

$$\sigma(z, y, \omega) = \frac{M_y''}{I_y} z - \frac{M_z''}{I_z} y + \frac{M_\omega''}{I_\omega} \omega, \quad (20)$$

де  $z, y, \omega$  – декартові координати розглядуваної точки поперечного перерізу, в якій визначаються напруження, відносно центра ваги та секторіальна координата в цій точці.

Перевіримо наведену модель, порівнявши результати різних розрахунків з даними моделювання методом скінченних елементів у програмах ConSteel 13, FE-STAB, Dlubal RSTAB 8.19.01 (додатковий модуль FE-LTB) із аналізом другого порядку. Порівняння внутрішніх зусиль і нормальних напружень для двох розкритих балок зведемо до табл. 2. Проліт швелерної і двотаврової балок із близькою площею поперечного перерізу становив 6 м, а вертикальне навантаження на них складало 8 кН/м (кут нахилу покрівлі  $\alpha$  різний).

Таблиця 2 – Порівняння моделі розрахунку з чисельним експериментом

Переріз, площа	$\alpha, ^\circ$	Метод, теорія	$M_y, \text{кНсм}$	$M_z, \text{кНсм}$	$M_\omega, \text{кНсм}^2$	$\sigma, \text{МПа}$
Швелер IPE 200 A = 29,01 см <sup>2</sup>	5	<b>розвинена модель</b>	<b>3674</b>	<b>-100</b>	<b>-756</b>	<b>226 / 1,00</b>
		MCE ConSteel 13	3672	-108	-860	229 / 1,01
		MCE FE-STAB	3698	-109	-835	227 / 1,00
		MCE FE-LTB	3624	-91	-662	219 / 0,97
		тонкостінних стрижнів	3586	-314	-1594	264 / 1,17
	15	<b>розвинена модель</b>	<b>3572</b>	<b>-135</b>	<b>-788</b>	<b>226 / 1,00</b>
		MCE ConSteel 13	3555	-130	-810	224 / 0,99
		MCE FE-STAB	3580	-132	-804	223 / 0,99
		MCE FE-LTB	3513	-104	-699	216 / 0,96
		тонкостінних стрижнів	3477	-932	-1078	412 / 1,82
	30	<b>розвинена модель</b>	<b>3208</b>	<b>-168</b>	<b>-796</b>	<b>211 / 1,00</b>
		MCE ConSteel 13	3176	-147	-710	204 / 0,97
MCE FE-STAB		3197	-152	-730	203 / 0,96	
MCE FE-LTB		3147	-111	-721	198 / 0,94	
тонкостінних стрижнів	3118	-1800	-248	677 / 3,21		
Двотавр IPE 200 A = 28,48 см <sup>2</sup>	5	<b>розвинена модель</b>	<b>3588</b>	<b>-25</b>	<b>-154</b>	<b>199 / 1,00</b>
		MCE ConSteel 13	3590	-20	-130	197 / 0,99
		MCE FE-STAB	3587	-76	-127	216 / 1,09
		MCE FE-LTB	3589	-9	-94	192 / 0,96
		тонкостінних стрижнів	3586	-314	328	-307 / -1,54
	15	<b>розвинена модель</b>	<b>3480</b>	<b>-49</b>	<b>-188</b>	<b>203 / 1,00</b>
		MCE ConSteel 13	3480	-36	-100	196 / 0,97
		MCE FE-STAB	3477	-74	-103	209 / 1,03
		MCE FE-LTB	3479	-15	-160	191 / 0,94
		тонкостінних стрижнів	3477	-932	969	-541 / -2,67
	30	<b>розвинена модель</b>	<b>3122</b>	<b>-73</b>	<b>-232</b>	<b>195 / 1,00</b>
		MCE ConSteel 13	3120	-50	-80	181 / 0,93
MCE FE-STAB		3118	-70	-78	188 / 0,96	
MCE FE-LTB		3119	-18	-246	176 / 0,90	
тонкостінних стрижнів	3118	-1800	1872	-861 / -4,42		

При моделюванні у програмі Dlubal RSTAB 8.19.01 початкове викривлення задавалось у вигляді рівномірно розподіленого крутного навантаження (аналіз за додатковими силами):

$$m_v = k_1 q_z v_{0,m}, \quad (21)$$

де  $k_1$  – коефіцієнт, що враховує нерівномірність початкового викривлення по довжині балки, згідно з [4] приймається із запасом 0,85, але при рівності інтегралів від нерівномірного початкового викривлення у формі синусоїди та рівномірного отримується цифра  $2/\pi \approx 0,637$ , у формі параболи –  $2/3 = 0,667$ .

Модуль пружності та границя текучості сталі приймалися постійними ( $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $f_y = 235$  МПа). Величина початкового викривлення становила для швелера 1,5 см (0,5l/200), крива стійкості –  $c$ , для двотавра 1,2 см (0,5l/250), крива стійкості –  $b$  згідно з EN 1993-1-1 при пружному розрахунку. Криву початкового викривлення прийнято за синусоїду. Довжина області зсуву складається з чотирьох кроків покрівельного несучого профільованого настилу FI + 100/275 - 0.75 | Fischer FI із горизонтальною проекцією 3 м, який з'єднується з прогоном через хвилю, забезпечуючи таким чином достатню крутильну жорсткість за критерієм Фогеля/Гейла завдяки наявності зменшеної порівняно з EN 1993-1-1 потрібної зсувної жорсткості для прийняття зв'язаної осі обертання стрижня.

Згідно з теорією тонкостінних стрижнів урахування кручення для швелерних прогонів дає зменшення розрахункових нормальних напружень у середньому на 15% порівняно зі згином у двох площинах. Зусилля, що виникають від ексцентричності прикріплення балки болтами на опорах, можуть теоретично знизити напруження в небезпечному перерізі більш ніж у два рази (для похилих прогонів, прикріплених стінкою). В дійсності ж це зниження буде значно меншим внаслідок нещільності болтових з'єднань. Наші власні підрахунки цих зусиль з урахуванням стандартних зазорів між болтом і отвором для різних класів точності болтового з'єднання (отримане поздовжнє зусилля зменшувалось на величину, що відповідає деформації, рівній зазору) на основі уточненої моделі з урахуванням жорсткості приєднаних конструкцій показали, що несуча здатність прогонів не збільшується, тому цей вплив враховувати недоцільно. Тим не менш, швелер вважається оптимальною формою перерізу для похилої покрівлі. У реальній розкріпленій конструкції профільований настил збільшує крутильну і згинальну жорсткість прогону проти викривлення, тому ефект буде іншим.

**Висновки.** Розрахунки показали, що, навіть при кріпленні профільованого настилу через хвилю, згинальний момент у площині найменшої жорсткості суттєво зменшується (для швелера при кутах нахилу покрівлі 5 – 30° більш ніж в 3 рази, для двотавра – більш ніж в 12 раз) і його вплив на загальний напружено-деформований стан конструкції практично нівелюється. Нормальні напруження для двотавра виявились відчутно нижчими (на 8 – 12%). Тому двотавр може вважатися оптимальною формою поперечного перерізу прокатного прогону і для похилої покрівлі внаслідок зменшення негативної дії крутного навантаження. Порівняння свідчить про те, що розвинена модель розрахунку балки за теорією другого порядку відповідає чисельному експерименту і добре узгоджується з ним. Незначна розбіжність результатів пояснюється спрощеними передумовами при розрахунку, до того ж, вона в більшості випадків йде в незначний запас міцності, на відміну від теорії тонкостінних стрижнів, яка придатна тільки для нерозкріплених балок у зв'язку з прийняттям занадто простих передумов, які не враховують ефекти другого порядку, жорсткість приєднаних конструкцій і суттєво завищують результат. При визначенні несучої здатності ефективним буде врахування по можливості жорсткості бічних в'язей і пластичної роботи сталі.

## Література

1. Balázs I. and Melcher J., Stability of Thin-Walled Beams with Lateral Continuous Restraint, Transactions of the VŠB–Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series, 15(1), (2015), pp 1-10.
2. Put B.M., Pi Y.L. and Trahair N.S., Bending and torsion of cold-formed channel beams, Journal of Structural Engineering, 125(5), (1999), pp 540-546.



3. Kindmann R., Stahlbau, Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung 4. Auflage, Berlin: Ernst & Sohn, 2008. – 429 s.
4. Kuhlmann U., Stahlbau-Kalender 2009: Schwerpunkt – Stabilität, Berlin: Ernst & Sohn, (2009), – 1032 s.
5. Wagenknecht G., Stahlbau-Praxis nach Eurocode 3: Band 1 Tragwerksplanung, Grundlagen, Berlin: Beuth Verlag GmbH, (2011), – 396 s.
6. Kindmann R. and Kraus M., Steel structures: Design using FEM, John Wiley & Sons, (2011), pp:168-216.
7. Krahwinkel M., Zur Beanspruchung stabilisierender Konstruktionen im Stahlbau, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4 Bauingenieurwesen, Nr. 166, Düsseldorf: VDI-Verlag, (2001), 182 s.
8. Kindmann R., Bemessung stabilisierender Verbände und Schubfelder / R. Kindmann, M. Krahwinkel // Stahlbau 70 (2001), S. 885 – 899.
9. Frickel J. Bemessung von Trägern unter Biegung und Torsion nach Th. II. Ordnung / J. Frickel // RUBSTAHL-Bericht 2-2002, Ruhr-Universität Bochum – S. 89-94.
10. Hudz S., The Problem of Consideration Torsion Emergence in Beams / S. Hudz, G. Gasii, V. Pents // International Journal of Engineering & Technology, 7 (3.2) (2018), pp:141-148.

### References

- [1] Balázs I. and Melcher J., Stability of Thin-Walled Beams with Lateral Continuous Restraint, Transactions of the VŠB–Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series, 15(1), 2015.
- [2] Put B.M., Pi Y.L. and Trahair N.S., Bending and torsion of cold-formed channel beams, Journal of Structural Engineering, 125(5), 1999.
- [3] Kindmann R., Stahlbau, Teil 2: Stabilität und Theorie II. Ordnung 4. Auflage, Berlin: Ernst & Sohn, 2008.
- [4] Kuhlmann U., Stahlbau-Kalender 2009: Schwerpunkt – Stabilität, Berlin: Ernst & Sohn, 2009.
- [5] Wagenknecht G., Stahlbau-Praxis nach Eurocode 3: Band 1 Tragwerksplanung, Grundlagen, Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2011.
- [6] Kindmann R. and Kraus M., Steel structures: Design using FEM, John Wiley & Sons, 2011.
- [7] Krahwinkel M., Zur Beanspruchung stabilisierender Konstruktionen im Stahlbau, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4 Bauingenieurwesen, Nr. 166, Düsseldorf: VDI-Verlag, 2001.
- [8] Kindmann R., Bemessung stabilisierender Verbände und Schubfelder / R. Kindmann, M. Krahwinkel // Stahlbau 70, 2001.
- [9] Frickel J. Bemessung von Trägern unter Biegung und Torsion nach Th. II. Ordnung / J. Frickel // RUBSTAHL-Bericht 2-2002.
- [10] Hudz S., The Problem of Consideration Torsion Emergence in Beams / S. Hudz, G. Gasii, V. Pents // International Journal of Engineering & Technology, 7 (3.2) 2018.

### РАЗВИТАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА СТАЛЬНЫХ РАСКРЕПЛЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

**Гудзь С.А.**, к.т.н., доцент

goods.sergiy@gmail.com ORCID 0000-0002-4764-8635

*Национальный университет «Полтавская политехника имени Юрия Кондратюка»*

**Гасий Г.М.**, д.т.н., доцент

grigorijm@gmail.com ORCID 0000-0002-1492-0460

*Сумской национальный аграрный университет*

**Дариенко В.В.**, к.т.н., доцент

vvdarienکو@gmail.com ORCID 0000-0001-9023-6030

*Центральноукраїнський національний технічний університет*

**Аннотация.** В статье рассмотрены основные этапы расчета стальных раскрепленных изгибаемых элементов с начальными несовершенствами по деформированной схеме. Раскрепление может происходить с помощью присоединенных к стальной балке конструкций. На основе нового подхода к анализу внутренних силовых факторов была поставлена цель найти и описать особенности эксплуатации балки при совместном действии поперечного изгиба и кручения. Была усовершенствована существующая теоретическая модель с устранением присутствующих в ней недостатков. На примерах проведено сравнение методик определения несущей способности по устойчивости гибких элементов. Было предложено увеличить экономию материала путем детализации расчета.

**Ключевые слова:** бимомент, искривление, устойчивость, кручение, раскрепление.

## DEVELOPED MODEL OF STEEL RESTRAINED ELEMENTS DESIGN FOR STABILITY BY THE COMPATIBLE ACTION OF TRANSVERSE BENDING AND TORSION

**Hudz S.A.**, Ph.D., Assistant Professor  
goods.sergiy@gmail.com ORCID 0000-0002-4764-8635  
*National University «Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic»*

**Gasii G.M.**, Ph.D., Assistant Professor  
grigorium@gmail.com ORCID 0000-0002-1492-0460  
*Sunny National Agrarian University*

**Darienko V.V.**, Ph.D., Assistant Professor  
vvdarienko@gmail.com ORCID 0000-0001-9023-6030  
*Central Ukrainian National Technical University*

**Abstract.** The main stages of the calculation of steel restrained flexible elements with initial imperfections are considered according to the deformed scheme. Restraint can occur using structures attached to the steel beam, such as profiled flooring, which is attached with self-tapping screws. The goal to find and describe the features of beam operation under the combined action of transverse bending and torsion was set on the basis of a new approach to the analysis of internal force factors. The existing theoretical model has been improved to eliminate the deficiencies present in it. A comparison of the methods for determining the bearing capacity of flexible elements by stability was carried out using examples. It was proposed to increase material savings by detailing the calculation. The moments to which you need to pay attention when calculating the restrained elements, especially the purlins of a light inclined roof, were highlighted to match the constructed model with the real work of beams with complex resistance. The complexity of the mathematical description of the bending-torsional bimoment function often leads to simplifications and analytical errors in the process of determining the internal forces, which depend on the function of the rod angle of rotation. Therefore, it was decided to clarify the model for determining the bearing capacity of restrained steel elements of various cross-sections. The tasks of identifying the causes and consequences of the occurrence of torsion, studying methods of control or minimization require further theoretical research and solutions. It is proved that the calculated bimoment depends not only on the load, its eccentricity, the elastic bending-torsional constant of the cross-section and span of the beam, but also on the stiffness of the structures laterally attached to the beam. The optimal cross-sectional shape of the rolled purlin for an inclined roof was justified, namely the I-beam, due to a decrease in the negative effect of the torsion load.

**Keywords:** bimoment, curvature, stability, buckling, torsion, restraint.