

ПОШУК АЛГЕБРАЇЧНИХ КРИВИХ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Воліна Т. М.

Ключові слова: довжина дуги, параметричні рівняння, алгебраїчна крива, натуральний параметр

Для багатьох задач, особливо в диференціальній геометрії, важливо мати криву, задану параметричними рівняннями у функції довжини дуги. У такому випадку для кривої завжди можна знайти натуральне рівняння. У науковій літературі наведені деякі криві, які мають натуральні рівняння, тобто для них можуть бути знайдені параметричні рівняння у функції довжини дуги. До відомих плоских кривих належать: коло, ланцюгова лінія, ланцюгова лінія рівного опору, циклоїда, трактриса, епі- та гіпоциклоїди, зокрема астроїда та кардіоїда як їх часткові випадки, та лише дві спіралі: евольвента кола та логарифмічна спіраль. Для інших алгебраїчних кривих наведено тільки явні або параметричні рівняння у функції довільного параметра. Так виникає проблема аналізу алгебраїчних кривих на можливість їх аналітичного опису у функції натурального параметра.

Метою представлено дослідження був пошук алгебраїчних кривих, які можуть описуватися параметричними рівняннями у функції довжини дуги. Об'єктом дослідження були алгебраїчні криві. Предметом дослідження були параметричні рівняння кривих у функції довжини дуги.

Із наведених у працях алгебраїчних кривих вдалося знайти тільки одну, для якої натуральне рівняння не наведене, але воно існує. Це кубіка Чирнгаузена, натуральне рівняння та параметричні рівняння якої у функції довжини власної дуги мають вигляд:

$$k = \frac{2^{5/3} \cdot (s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{2/3}}{3a^{1/3}((2a)^{4/3} - (2a)^{2/3} \cdot (s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{2/3} + (s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{4/3})};$$

$$x = 7a - \frac{3 \cdot 2^{2/3} a^{5/3}}{(s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{2/3}} - \frac{3a^{1/3}(s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{2/3}}{2^{2/3}};$$

$$y = 3(2a)^{2/3} \cdot (s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{1/3} - s - \frac{6 \cdot 2^{1/3} \cdot a^{4/3}}{(s + \sqrt{4a^2 + s^2})^{1/3}}.$$

Для конструювання інших алгебраїчних кривих у функції натурального параметра було запропоновано підхід на основі пошуку функцій, які дають можливість перейти до натурального параметра. Він ґрунтується на підборі алгебраїчних функцій, які дають можливість проінтегрувати вираз для знаходження довжини дуги і в подальшому перейти до натурального параметра. У диференціальному рівнянні одна функція – $x(s)$ – задається наступним чином: $x'^2 + y'^2 = 1$, де a – стала величина, n – показник степеня, а інша – $y(s)$ – визначається. За такого підходу нам вдалося знайти алгебраїчні криві при значеннях степеня $n=2/3$ і $n=3/2$.

На рис. 1 побудовані отримані криві при різних значеннях сталої a .

За допомогою запропонованого підходу можна розширити можливості формування плоских алгебраїчних кривих.

Крім того, запропонований підхід може бути використано для конструювання інших (не алгебраїчних) кривих.

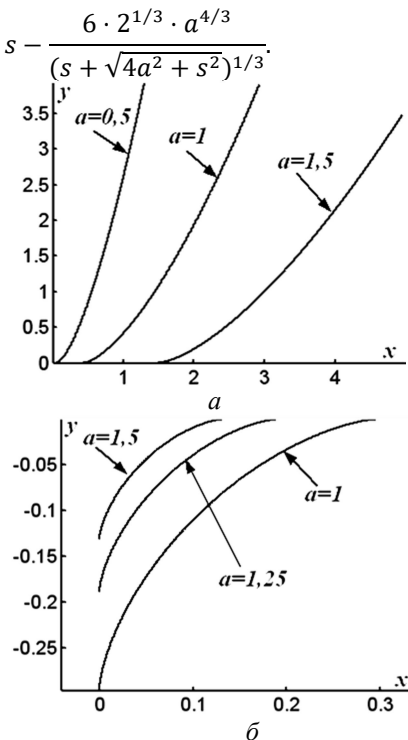


Рис. 1. Алгебраїчні криві, наведені для різних значень сталої a : a – побудовані при $n=2/3$; $б$ – побудовані при $n=3/2$.