

- Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции. / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев – М.: Наука, 1983. – 750 с.
- Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С.Бугров, С.М.Никольский – М.: Наука, 1980. – 452 с.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. / В.С.Владимиров – М.: Наука, 1988. – 512 с.

УДК 621.671

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ МЕРИДИАННОГО РАВНОСКОРОСТНОГО И ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКОВ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Косторной С.Д., Чаплыгин А.А.

Постановка проблемы в общем виде. Для проектирования и гидродинамического анализа лопастных гидравлических машин задачи построения и расчета меридианного потенциального или равноскоростного потоков в проточной части должны быть решены.

Анализ последних исследований и публикаций. Имеется несколько приближенных методов их численного решения [1-3]. При практических расчетах для этих целей применяют универсальный расчетно-графический способ, который весьма трудоемок и в большинстве случаев не удовлетворяет требуемой точности.

Формулировка целей статьи (постановка задачи). В данной работе предлагаются точные методы расчета равноскоростного и потенциального потоков. Для равноскоростного потока применен метод на основе точного аналитического решения геометрических задач, принятых в основу определения равноскоростного потока, а для потенциального – метод гидродинамических особенностей [4]. Предлагаемые методы основаны на точных численных алгоритмах решения и реализованы на ЭВМ, что позволило автоматизировать процесс проектирования и заменить ручной труд конструктора машинным.

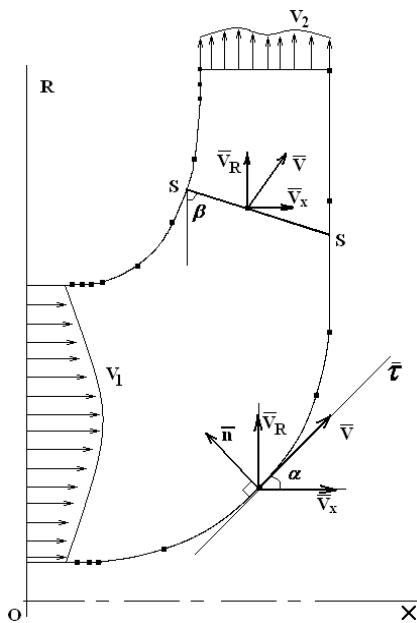


Рис.1. Расчетная схема

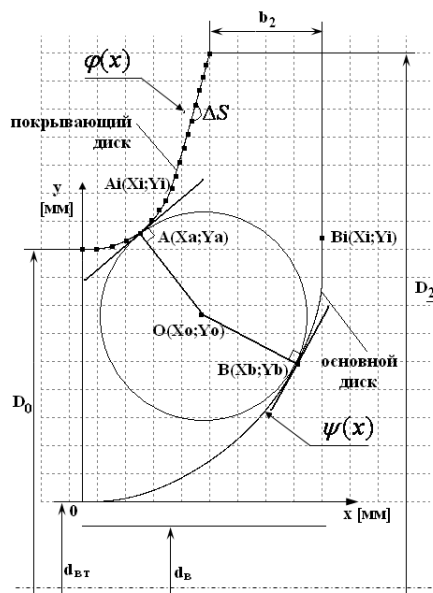


Рис.2. Меридианное сечение проточной части канала

Изложение основного материала исследования.

Расчет потенциального потока. Постановка и алгоритм решения задачи потенциального течения идеальной жидкости в криволинейном канале произвольной формы (рис. 1) выполняются следующим образом:

течение предполагается установившимся, жидкость несжимаемой, нормальная скорость во входном и выходном сечениях – заданной и равной $V_1(\Psi)$ и $V_2(\Psi)$. Движение жидкости рассматривается в цилиндрической системе координат X, R, θ , ось OX которой совпадает с осью симметрии канала (рис.1).

Данная задача течения жидкости в канале представляет собой классическую внутреннюю краевую задачу Неймана и состоит в отыскании решения уравнения Лапласа относительно потенциала скорости $\varphi(X, R, \theta)$

$$\Delta\varphi(x, R) = 0 \quad (1)$$

при граничном условии

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_L = V_n(x, R), \quad (2)$$

где $V_n(x, R)$ - нормальная составляющая скорости на контуре меридианного сечения канала, равная нулю на границах канала и $V_1(\Psi)$ и $V_2(\Psi)$ во входном и выходном сечениях,

Δ - оператор Лапласа.

Сформулированная задача имеет решение при выполнении условия:

$$\int_L V_n ds = 0, \quad (3)$$

которое соответствует выполнению закона сохранения массы движущейся жидкости.

Решение поставленной краевой задачи определяется в виде суммы потенциалов непрерывных кольцевых вихрей, размещенных на контурах меридианного сечения канала с плотностью $\gamma(s)$.

Компоненты скорости связаны с потенциалом скорости $\varphi(x, R)$ соотношением

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial n}; \quad V_R = \frac{\partial\varphi}{\partial R}; \quad (4)$$

где V_x - составляющая, параллельная оси OX ,

V_R - радиальная составляющая.

Аналогом прямолинейной вихревой нити (плоского вихря) в осесимметричном течении является круговое вихревое кольцо.

Так же, как в плоском случае, при решении задачи обтекания, располагая на поверхности тела вращения слои особенностей и удовлетворяя граничному условию непротекания поверхности или протекания, получаем систему уравнений, связывающих между собой интенсивность (плотность) γ слоя и координаты точек меридианного сечения тела. Поскольку нормальная скорость на контуре, вызванная слоями

особенностей, может быть выражена через составляющие скоростей по осям X и R и исходя из геометрических соображений (рис.1), получим систему уравнений для решения рассмотренной задачи:

$$V_n|_l = V_x \sin \alpha + V_R \cos \alpha = V_n(x, R), \quad (5)$$

где $V_x = V_x(\gamma)$; $V_R = V_R(\gamma)$ - составляющие скорости по осям координат, индуцируемые кольцевыми слоями вихрей γ ;

α - угол между касательной к контуру и осью OX .

Выражения для $V_x(\gamma)$, $V_R(\gamma)$, имеют следующий вид [4,5]:

$$V_x(\gamma) = \frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (R_1 + R_0)^2}} \left[\frac{2-\lambda^2}{1-\lambda^2} E - \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} E - 2K \right]; \quad (6)$$

$$V_R(\gamma) = -\frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (R_1 + R_0)^2}} \cdot \frac{1}{R_0} \left[\frac{2-\lambda^2}{1-\lambda^2} E - 2K \right]; \quad (7)$$

где $\lambda^2 = \frac{4R_1R_0}{(x-\xi)^2 + (R_0 + R_1)^2}$;

$E(\lambda^2)$, $K(\lambda^2)$ - полные эллиптические интегралы I и II родов;

x, R_0 - координаты расчетной точки;

ξ, R_1 - координаты текущей точки.

Используя метод дискретных вихрей [5], уравнение (5) запишем для каждой расчетной точки в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_i \sum_{j=1}^{N,M} \frac{\gamma_j}{\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (R_{1j} + R_{0i})^2}} \left(\frac{2-\lambda_{ij}^2}{1-\lambda_{ij}^2} E_{ij} - \frac{R_{1j}}{R_{0i}} \cdot \frac{\lambda_{ij}^2}{1-\lambda_{ij}^2} E_{ij} - 2K_{ij} \right) - \\ - \cos \alpha_i \sum_{j=1}^{N,M} \frac{\gamma_j}{R_{0i}} \frac{x_i - \xi_j}{\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (R_{1j} + R_{0i})^2}} \left(\frac{2-\lambda_{ij}^2}{1-\lambda_{ij}^2} E_{ij} - 2K_{ij} \right) = 4\pi V_{ni}, \end{aligned} \quad (8)$$

где N - количество расчетных точек;

M - количество дискретных кольцевых вихрей.

В результате решения системы линейных алгебраических уравнений (8) типа

$$AX = B,$$

где A - матрица коэффициентов,

X - матрица-столбец неизвестных γ_i ,

B - матрица-столбец свободных членов, определяются величины дискретных вихрей γ_i .

В дальнейшем, используя выражения (6-7), в любой точке можно рассчитываются величина и направления скорости меридианного потока.

Расчет координат линий тока. Для расчета координат линий тока используется уравнение неразрывности, записанное для произвольного сечения $s-s$ канала. В практических расчетах целесообразно их совмещать с сечениями, проходящими через расчетные точки. Для этого вычисляются на линии $s-s$ нормальная к ней скорость и для каждого отрезка линии $s-s$ длиной ΔS расход жидкости $\Delta Q = \frac{Q}{i-1}$, где i - количество линий тока. Величина скорости и расхода в этом случае определяется по формулам:

$$V_n = V_x \cos \beta - V_R \sin \beta ; \quad (9)$$

$$Q = 2\pi \int_l V_n dn , \quad (10)$$

где $V_x = \sum_{j=1}^M V_{xj}(\gamma) ; V_R = \sum_{j=1}^M V_{Rj}(\gamma) ,$

β - угол между осью OR и сечением $s-s$ (рис.1);

l - длина сечения $s-s$ от внешнего контура канала до внутреннего.

В частном случае равномерного разбиения сечения $s-s$ на отрезки ΔS величина расхода жидкости через поверхности, определяемые отрезками ΔS , будет различной. Поэтому для нахождения координат линий тока, проходящих через сечение $s-s$, необходимо проинтерполировать зависимость $Q = f(\Delta S)$ на равномерные ΔQ и определить неравномерные отрезки ΔS .

Практическая реализация описанного алгоритма представлена в работе [6].

Алгоритм построения равноскоростного потока.

Аналогично рассмотренной выше задаче расчета потенциального потока, расчет и построение равноскоростного потока в осесимметричном канале произвольной формы выполняется в следующей последовательности.

1. По исходным данным координат точек $A_i(x_i, y_i)$ покрывающего диска, соответствующего внешнему контуру, описываемого уравнением $\varphi(x)$ и точек $B_i(x_i, y_i)$ рабочего диска, соответствующего внутреннему контуру, описываемого уравнением $\psi(x)$, где $i = 1, \dots, N$ - количество заданных точек, строится меридианное сечение проточной части канала. Сглаживание кривых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в соответствующих точках выполняется кубическим сплайном [7], общее уравнение которого (рис. 2)

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d . \quad (11)$$

Так как интерполяционный многочлен (11) для кривых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ строится по трем точкам, последовательно расположенных на контуре, то геометрия покрывающего и основного дисков будет задана аналитически в виде кусочно-непрерывных функций уравнениями: $y_1(x) = \varphi(x), \quad y_2(x) = \psi(x)$ [7].

2. Внешний контур разбивается на участки равной длины ΔS (рис. 2). Для этого вычисляется полная длина кривой $\varphi(x)$ по формуле:

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + [\varphi'(x)]^2} dx, \quad (12)$$

где N - количество точек, которыми задан соответствующий контур, а длина

$$\Delta S = \frac{L}{M-1},$$

где M - количество точек равномерного разбиения.

После этого по контуру откладываются точки, отстоящие друг от друга на расстояние ΔS по кривой.

3. В сечения проточной части вписываются окружности таким образом, чтобы точка касания к внешнему контуру покрывающего диска совпадала с точками равномерного разбиения $A(x_A, y_A)$, а точки $B(x_B, y_B)$ являлись точками касания вписанной окружности к контуру основного диска (рис.2). Координаты точек B_i определяются из условия пересечения нормалей в точках $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ в точке $O(x_O, y_O)$, являющейся центром вписанной окружности.

Уравнение нормали в точках $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, а так же расстояния AO и BO определяются из системы уравнений (13)

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{k_1}(x - x_A) + y_A, \\ y = \frac{-1}{k_2}(x - x_B) + y_B, \\ r_{AO} = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2}, \\ r_{BO} = \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2}, \end{cases} \quad (13)$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты касательных в точках $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, определяемые из уравнений контура покрывающего и основного дисков

$$k_1 = \varphi'(x), \quad k_2 = \psi'(x).$$

Координаты центра вписанной окружности $O(x_O, y_O)$ определяются из решения системы уравнений (13) и условия $r_{AO} = r_{BO}$.

Численное решение системы (13) выполняется численными процедурами решения систем нелинейных уравнений относительно неизвестных x_O, y_O, x_B [8].

$$\begin{cases} y_0 = \frac{-1}{k_1}(x_0 - x_A) + y_A; y_0 = \frac{-1}{k_2}(x_0 - x_B) + y_B; \\ (x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2 = (x_O - x_B)^2 + (y_O - \psi(x_B))^2. \end{cases} \quad (14)$$

Соответствующие методы решения системы (14) описаны в [8]. Решение ищется с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

4. Через точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ проводится ортогональная линия $f(x)$ к линиям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, (рис.3). Уравнение которой выбирается в виде кубической параболы, так как возможно изменение знака её второй производной, т.е. кривизны линии AB .

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (15)$$

Таким образом, коэффициенты a, b, c, d уравнения (15) должны удовлетворять четырем условиям:

$$f(x_A) = y_A, \quad f(x_B) = y_B, \quad f'(x_A) = \frac{-1}{k_1}, \quad f'(x_B) = \frac{-1}{k_2} \quad (16)$$

где $f'(x_A)$ и $f'(x_B)$ – производные ортогонали $f(x)$ в точках A и B :

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c. \quad (17)$$

После выполнения соответствующих преобразований система условий (16) записывается в виде системы уравнений (18) относительно неизвестных коэффициентов a, b, c, d уравнения ортогонали (15):

$$\begin{cases} ax_A^3 + bx_A^2 + cx_A + d = y_A; & ax_B^3 + bx_B^2 + cx_B + d = y_B; \\ k_1(3ax_A^2 + 2bx_A + c) = -1; & k_2(3ax_B^2 + 2bx_B + c) = -1. \end{cases} \quad (18)$$

Коэффициенты $\{a, b, c, d\}$ данной системы, однозначно определяют ортогональ для соответствующей точки на покрывающем диске. Прделав эту операцию для всех точек равномерного разбиения на контуре покрывающего диска, получаем систему ортогоналей, изображенную на рисунке 4.

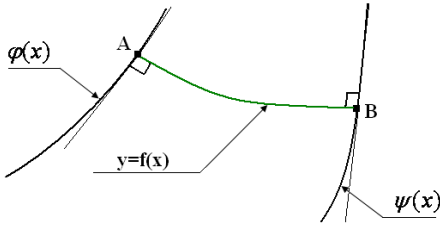


Рис.3

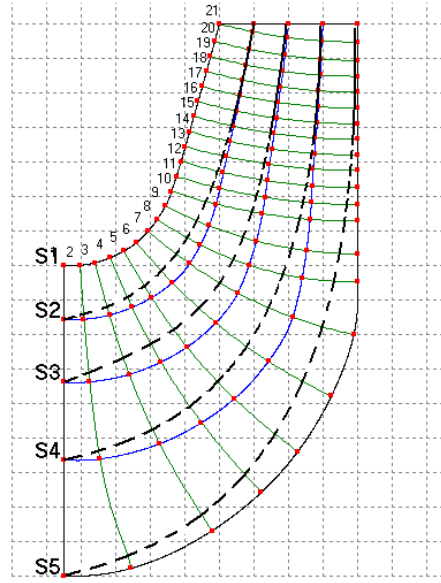


Рис.4

4. Линии тока в меридианном сечении проточной части ПК определяются следующим образом:

а) поверхности покрывающего и сновного дисков принимаются за линии тока S1 и S5, если принято общее количество линий тока равное 5 (Рис.4). Для каждой построенной ортогонали определяется площадь поверхности её вращения относительно оси рабочего колеса по формуле:

$$S_i = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} f_i(x) \sqrt{1 + [f_i'(x)]^2} dx, \quad (19)$$

где $f_i(x)$ - уравнение i-й ортогонали.

б) контур каждой ортогонали разбивается на 4 части точками M(x_M, y_M), N(x_N, y_N) и P(x_P, y_P), так чтобы площади поверхностей вращения кривых AM, MN, NP и PB были одинаковыми, т.е. $S_i/4$ (рис. 5).

Площади поверхностей вращения определяются по формулам:

$$S_{AM} = 2\pi \int_{x_A}^{x_M} f_i(x) \sqrt{1 + [f_i'(x)]^2} dx, \quad S_{MN} = 2\pi \int_{x_M}^{x_N} f_i(x) \sqrt{1 + [f_i'(x)]^2} dx,$$

$$S_{NP} = 2\pi \int_{x_N}^{x_P} f_i(x) \sqrt{1 + [f_i'(x)]^2} dx, \quad S_{PB} = 2\pi \int_{x_P}^{x_B} f_i(x) \sqrt{1 + [f_i'(x)]^2} dx,$$

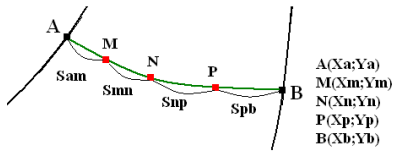


Рис.5 Определение координат линий тока

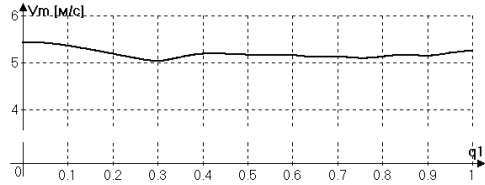


Рис.6 Распределение меридианных скоростей

Координаты x_M , x_N , x_P выбираются так чтобы:

$$S_{AM} = S_{MN} = S_{NP} = S_{PB} = \frac{S_i}{4}$$

Соединяя последовательно расположенные точки разбиения на соседних ортогоналях, и сглаживая полученные кривые сплайном, получаем три внутренние линии тока S_2 , S_3 и S_4 изображенные на рисунке 4. на котором пунктирной линией изображены линии тока для потенциального потока, а сплошной линией – для равноскоростного.

Выводы.

Результаты использования данных алгоритмов для различных форм проточной части рабочего колеса центробежного насоса быстроходностью $n_S = 40 \div 350$ подтвердили их работоспособность и требуемую точность расчетов. На рис.6 изображен график распределения меридианной скорости равноскоростного потока для пяти линий тока рабочего колеса $n_S = 250$.

Литература.

1. Этинберг И.Э. Гидродинамика гидравлических турбин. / И.Э.Этинберг, Б.С.Раухман - Л.: Машиностроение, 1978.- 280с.
2. Викторов Г.В. Решение осесимметричной задачи для произвольного вихревого течения жидкости методом интегральных уравнений / Г.В.Викторов // Сб. науч. тр. / Моск. энерг. ин-т, 1972.- вып. 132. С. 80-90.
3. Дорфман Л.А. Численные методы в газодинамике турбомашин. / Л.А.Дорфман - Л.: Энергия, 1974.- 270с.
4. Косторной С.Д. Расчет меридионального потенциального потока в осесимметричных каналах произвольной формы / С.Д.Косторной, Л.М.Коробко, В.Г.Неня // Энергетика (ИВУЗ) - Минск.- 1987.- Вып. 4.- С. 112-115.
5. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика. / Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе - М.: Физматгиз, 1963.- Ч.1.- 583 с.
6. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. / С.М.Белоцерковский - М.: Наука, 1965.- 242 с.
7. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. / Н.П.Корнейчук - М.: Наука, 1984.- 352 с.
8. Березин И.С. Методы вычислений / И.С.Березин, Н.П.Жидков : Том 1 (2-е изд.).- М.: Физматгиз, 1962.-639 с.