

РІВНОВАГА ПРУЖНОГО КЛИНА ЗІ СКІНЧЕННОЮ ТРІЩИНОЮ ПРИ ВЕРШИНІ

К. М. Некислих, к.ф.-м.н., доцент

А. Б. Баталова, ст. викладач

Сумський національний аграрний університет

Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано точний розв'язок задачі плоскої деформації пружного клина, бічні грані якого вільні від напружень, з прямолінійною скінченною тріщиною, що виходить з вершини клина і розташована на його осі симетрії. Факторизація коефіцієнта функціонального рівняння Вінера – Гопфа проведена в нескінченних добутках. Наводяться результати обчислень коефіцієнтів інтенсивності напружень, розподіли нормальних напружень на лінії продовження тріщини, а також нормальних переміщень берегів тріщини.

Ключові слова: пружний клин, тріщина, напруження, метод Вінера-Гопфа, факторизація.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Клиноподібні пружні тіла є досить поширеними моделями багатьох елементів конструкцій, машин та приладів. Тому дослідження напружено-деформованого стану таких тіл, які, крім того, містять дефекти типу тріщин є актуальною і важливою задачею.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Наближені розв'язки задачі плоскої деформації пружного клина, бічні грані якого вільні від напружень, зі скінченною прямолінійною тріщиною, яка знаходиться на осі симетрії клина і виходить з його вершини отримані в роботах [1-3], а точні розв'язки цієї задачі – в роботах [4-10].

В роботах [1-4] розглядалася задача у випадку, коли до берегів тріщини прикладені постійні нормальні зусилля. В [4] отриманий розв'язок цієї задачі зведенням до крайової задачі Рімана для аналітичних функцій; при цьому факторизація коефіцієнта задачі проведена в інтегралах типу Коші, але результати обчислень відсутні. У роботі [3] розв'язок задачі побудовано зведенням парного інтегрального рівняння, за допомогою оберненого перетворення Мелліна, до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, яке розв'язане чисельно. Обчислені значення густини інтегрального рівняння, через яку у вигляді інтеграла Абеля виражаються нормальні переміщення берегів тріщини. Для розв'язання цієї задачі в [1,2] використаний математичний апарат методу Вінера – Гопфа; при цьому виконана наближена факторизація шляхом апроксимації функції, що факторизується.

Точні значення коефіцієнтів інтенсивності напружень отримані в роботах [5-10] методом Вінера – Гопфа. У [5] розглядався випадок заданих на берегах тріщини сталих нормальних напружень за відсутності дотичних напружень, в [6,7] – зосереджених (нормальних та зсувних) сил, що діють на берегах тріщини, в [8] – зосереджених моментів, прикладених у вершині клина. У випадку дії зосереджених сил на берегах тріщини у вершині клина в [9,10] для коефіцієнтів інтенсивності напружень отримані точні замкнені вирази.

Методами наближеного конформного

перетворення [11,12] і інтегральних рівнянь [13] досліджувався частинний випадок цієї задачі про рівновагу пружної півплощини з крайовою тріщиною, перпендикулярною до межі півплощини, коли межа півплощини вільна від напружень, а на берегах тріщини прикладені постійні нормальні зусилля.

Нижче задача про рівновагу пружного клина бічні грані якого вільні від напружень, зі скінченною прямолінійною тріщиною, яка знаходиться на осі симетрії клина і виходить з його вершини, для якої інтегральне рівняння задане на напівнескінченному проміжку і має різницеве ядро, розв'язані методом Вінера – Гопфа [14]. Факторизація коефіцієнта функціонального рівняння Вінера – Гопфа проведена в нескінченних добутках. Наводяться результати обчислень коефіцієнтів інтенсивності напружень, розподіли нормальних напружень на лінії продовження тріщини, а також нормальних переміщень берегів тріщини.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Отримати точний розв'язок задачі плоскої деформації пружного клина, бічні грані якого вільні від напружень, з прямолінійною скінченною тріщиною, що виходить з вершини клина і розташована на його осі симетрії.

Виклад основного матеріалу. У полярній системі координат (r, ϑ) розглянемо пружний клин $0 \leq r < \infty, -\alpha \leq \vartheta \leq \alpha$ з тріщиною $0 \leq r < l, \vartheta = 0$ довжини l , яка виходить з вершини клина (рис. 1, а). Грані клина $0 \leq r < \infty, \vartheta = \pm \alpha$ вільні від напружень, а на берегах тріщини $0 \leq r < l, \vartheta = \pm 0$ діє сталий тиск p . При такому навантаженні тріщина розкривається. Її максимальне розкриття у вершині клина позначимо $2h$ (рис. 1, б). Величина h потребує визначення при розв'язанні задачі.

Оскільки плоска деформація клина симетрична відносно його осі, обмежимося розглядом верхнього півклина $0 \leq r < \infty, 0 \leq \vartheta \leq \alpha$.

Виходячи з того, що окружні переміщення u_ϑ на початку полярної системи координат повинні приймати нульове значення, будемо вважати, що

полярна вісь Op зв'язана з вершиною верхнього півклина і в процесі деформації півклина

залишається паралельною осі симетрії клина.

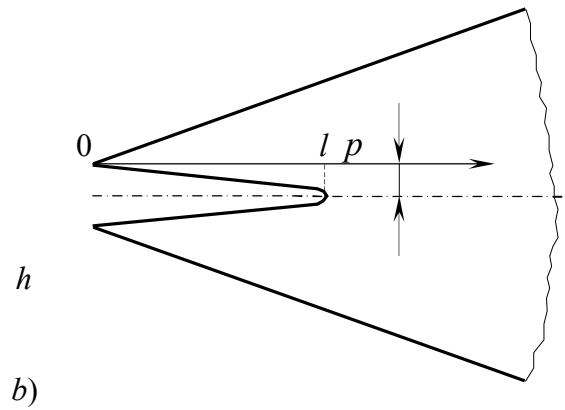
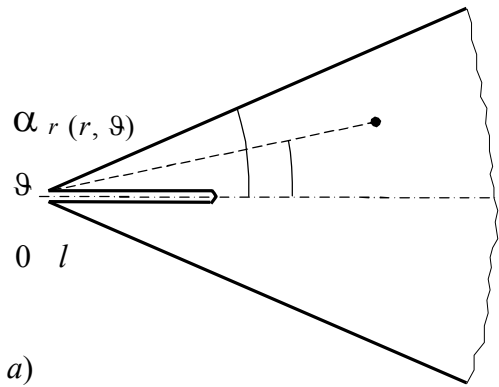


Рис.1 Клин з тріщиною.

Змішані крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=0} = -p \quad (0 \leq r < l), \quad u_{\theta}|_{\theta=0} = -h$$

$$(l \leq r < \infty), \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty), \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} = 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (2)$$

Введемо невідому функцію радіальної похідної нормальних переміщень верхнього берега тріщини

$$g(r) = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \Big|_{\theta=0} \quad (0 \leq r < l). \quad (3)$$

Тоді, замінивши в крайових умовах (1), (2) перші дві умови змішаного типу наступною однією:

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \Big|_{\theta=0} = \begin{cases} g(r), & 0 \leq r < l \\ 0, & l \leq r < \infty \end{cases} \quad (4)$$

з використанням інтегрального перетворення Мелліна отримаємо:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2G} \Big|_{\theta=0} = -\frac{m}{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\lambda(s)}{\Delta(s)} a(s) r^{-s-1} ds$$

$$\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \Big|_{\theta=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds$$

$$\begin{aligned} \lambda(s) &= \sin^2 s\alpha - s^2 \sin^2 \alpha, \\ \Delta(s) &= \sin 2s\alpha + s \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

де G – модуль зсуву, m – число Пуассона, $-1 < c < 0$,

$$a(s) = \int_0^l g(y) y^s dy \quad (6)$$

Підставимо вираз для $a(s)$ у першу рівність (5). Взявши $s = -i\tau$ та змінивши порядок

інтегрування, будемо мати:

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2G} \Big|_{\theta=0} = -\frac{m}{m-1} \frac{1}{r} \int_0^l g(y) dy \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\infty}^{\infty+i\infty} K(\tau) \left(\frac{r}{y}\right)^{i\tau} d\tau, \quad (7)$$

де позначено

$$K(\tau) = \frac{\lambda(-i\tau)}{\Delta(-i\tau)} = -i \frac{\text{sh}^2 \alpha \tau - \tau^2 \sin^2 \alpha}{\text{sh} 2\alpha \tau + \tau \sin 2\alpha}. \quad (8)$$

При цьому, зважаючи на відсутність полюсів функції $K(\tau)$ в околі осі $\text{Im } \tau = 0$, контур інтегрування $-\infty + i\epsilon < \tau < \infty + i\epsilon$ зміщується на дійсну вісь ($\epsilon = 0$).

Після введення заміни

$$r = l e^{-\xi}, \quad y = l e^{-\eta}, \quad g(l e^{-\eta}) e^{-\eta} = \varphi(\eta) \quad (0 < \eta < \infty) \quad (9)$$

вираз для напружень (7) набуває вигляду

$$\frac{\sigma_{\theta}}{2G} \Big|_{\theta=0} = -\frac{m}{m-1} e^{\xi} \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau \quad (10)$$

Задовольняючи з допомогою (10) першу крайову умову (1), отримуємо інтегральне рівняння задачі відносно функції $\varphi(\eta)$:

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty), \quad (11)$$

де права частина $f(\xi)$ інтегрального рівняння визначається за формулою

$$f(\xi) = \frac{m-1}{m} \bar{p} e^{-\xi}, \quad \bar{p} = \frac{p}{2G}. \quad (12)$$

Інтегральне рівняння (11) визначене на напівнескінченному інтервалі і його ядро (10) залежить від різниці змінних ξ і η . Таке

інтегральне рівняння допускає точний аналітичний розв'язок методом Вінера – Гопфа [14,15].

Розповсюдимо інтегральне рівняння (11) на

$$\int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \begin{cases} 0, & \xi \geq 0 \\ \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, & \xi < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(\xi), & \xi \geq 0 \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \quad (13)$$

і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi \quad (14)$$

Введемо до розгляду невідомі функції комплексного змінного

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad (15)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ і $\text{Im } z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$). За теоремою про згортку для інтегрального перетворення Фур'є перший доданок в (14)

дорівнює $K(z)\Phi^+(z)$. Отже, із рівності (14), відносно введених функцій, отримуємо функціональне рівняння Вінера – Гопфа

$$K(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z)$$

$$(-\infty < \text{Re } z < \infty, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-), \quad (16)$$

права частина якого є функція, аналітична у верхній півплощині комплексної площини і подається рівністю

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}} \frac{m-1}{m} \frac{1}{1-iz}, \quad (17)$$

а коефіцієнт $K(z)$ записаний у формулі (8).

Важливим етапом при розв'язанні функціонального рівняння (16) є факторизація функції $K(z)$, тобто представлення її у вигляді добутку двох функцій

$$K(z)/z = K^+(z)K^-(z), \quad (18)$$

де $K^{\pm}(z)$ – відмінні від нуля функції, аналітичні у верхній ($\text{Im } z > c^+$) та нижній ($\text{Im } z < c^-$) півплощинах відповідно. Фактично факторизується не сама функція $K(z)$, а відношення $K(z)/z$, тому що функція $K(z)$ має простий нуль $z=0$ на дійсній осі, а функція $K(z)/z$ не має на вказаній осі ні нулів ні полюсів. Факторизацію (18) здійснюємо в нескінченних добутках

всю числову вісь, вважаючи $\varphi(\eta) = 0$ при $-\infty < \eta < 0$

$$0, \quad \xi \geq 0$$

$$K^+(z) = K'(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{s_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{\delta_n}\right)^{-1}, \quad K^-(z) = \frac{K^+(-z)}{K'(0)}, \quad (19)$$

де s_n, δ_n ($n=1, 2, \dots$) – корені рівнянь $\lambda(s) = 0$ і $\Delta(s) = 0$ відповідно із півплощини $\text{Re } s > 0$.

Множник $K'(0)$ у нескінченному добутку (19) впливає із подання (18) при $z \rightarrow 0$. Друге співвідношення (19) відображає симетричність коренів s_n, δ_n ($n=1, 2, \dots$) відносно уявної осі, яка слідує із парності функції $\lambda(s)$ і непарності функції $\Delta(s)$.

Для знаходження $K'(0)$ із (19) визначимо поведінку коефіцієнта $K(z)$ із (8) в нулі. Оскільки $\text{sh}^2 \alpha z - z^2 \sin^2 \alpha \square (\alpha^2 - \sin^2 \alpha) z^2$, $\text{sh} 2\alpha z + z \sin 2\alpha \square (2\alpha + \sin 2\alpha) z$ при $z \rightarrow 0$, то

$$K(z) \square -i \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} z, \quad z \rightarrow 0. \quad (20)$$

З останньої формули отримуємо

$$K'(0) = -i \frac{\alpha^2 - \sin^2 \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha}. \quad (21)$$

З'ясуємо асимптотичну поведінку

множників факторизації $K^{\pm}(z)$ на нескінченності. Для цього із рівностей (8), (18) знаходимо $K(z) \square -i/2$, $K^+(z)K^-(z) \square -i/(2z)$ при $\text{Re } z \rightarrow \infty$. Звідси, з урахуванням другого співвідношення (19), маємо

$$K^+(z) \square \frac{-iA_1}{\sqrt{-iz}}, \quad K^-(z) \square \frac{-iA_1}{K'(0)\sqrt{iz}}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (22)$$

де A_1 – стала. Тоді завдяки рівності (18)

$$-\frac{i}{2z} = -\frac{A_1^2}{K'(0)z}. \quad \text{Звідси}$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{iK'(0)}{2}}. \quad (23)$$

Підставляючи вираз для сталої A_1 у формули (22), останні запишемо наступним чином:

$$K^+(z) \sim -i\sqrt{-\frac{K'(0)}{2z}}, \quad K^-(z) \sim \frac{1}{\sqrt{-2K'(0)z}}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Функціональне рівняння (16) з урахуванням (18) перепишемо у вигляді

$$zK^+(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z)/K^-(z) = F^+(z)/K^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-) \quad (25)$$

і факторизуємо праву частину (25) в різницю аналітичних функцій

$$F^+(z)/K^-(z) = f^+(z) - f^-(z). \quad (26)$$

Розкладаючи відповідний інтеграл типу Коші в ряд за теорією лишків, отримуємо

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^+(\zeta)d\zeta}{K^-(\zeta)(\zeta-z)} = \frac{\bar{p}}{\sqrt{2\pi}} \frac{m-1}{m} \frac{1}{K^-(-i)} \frac{1}{1-iz}. \quad (27)$$

Після цього рівняння (25) прийме вигляд

$$zK^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = \Phi^-(z)/K^-(z) - f^-(z) \quad (c^+ < \text{Im } z < c^-). \quad (28)$$

Обидві частини останнього рівняння є функції, які аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і, отже, є деякою цілою функцією $P(z)$. Скориставшись асимптотичними оцінками (24), а також наступними умовами на нескінченності:

$$\Phi^\pm(z) = o(1), \quad f^\pm(z) = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (29)$$

знаходимо $P(z) \equiv C$, де C – стала. Перша рівність (29) отримана завдяки тому, що функції

$\Phi^\pm(z)$, представлені інтегралом Фур'є в (15), зникають на нескінченності. Друга рівність (29) визначається із (27). Тоді маємо наступний розв'язок функціонального рівняння (16):

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z) + C}{zK^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = K^-(z)[f^-(z) + C]. \quad (30)$$

Стала C визначається з умови

аналітичності функції $\Phi^+(z)$ у точці $z = 0$:

$$f^+(0) + C = 0 \quad (31)$$

після чого маємо

$$\Phi^+(z) = if^+(z)/K^+(z). \quad (32)$$

Отже, ми побудували точний розв'язок (32) функціонального рівняння Вінера – Гопфа (16). Цей розв'язок дозволяє в аналітичному вигляді одержати розподіли напружень та переміщень верхнього берега тріщини.

Розв'язок інтегрального рівняння (11) знаходимо оберненим перетворенням Фур'є першої рівності (15). Враховуючи (32) будемо мати

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(\tau)}{K^+(\tau)} e^{-i\xi\tau} d\tau \quad (33)$$

Визначимо нормальні напруження на лінії продовження тріщини ($l < r < \infty$, $\vartheta = 0$). На основі виразу (10) для напружень і першої рівності (15) отримаємо

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{m}{m-1} \frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \Phi^+(\tau) e^{-i\xi\tau} d\tau \quad (34)$$

Враховуючи рівності (27) і (32) перепишемо (34) наступним чином:

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{\bar{p}e^{\xi}}{K^-(-i)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(i\tau)}{(1-i\tau)\Delta(i\tau)K^+(\tau)} e^{-i\xi\tau} d\tau \quad (\xi < 0). \quad (35)$$

Перетворимо останній інтеграл в ряд за теорією лишків. Підінтегральна функція має у

верхній півплощині прості полюси $\tau = i\delta_k$

($k = 1, 2, \dots$), де δ_k – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$. Обчисливши інтеграл з (35) за теоремою про лишки та використавши заміну $r = le^{-\xi}$, знаходимо розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини

$$\sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{ip}{K^-(-i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\delta_k)}{(\delta_k+1)\Delta'(\delta_k)K^+(i\delta_k)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-\delta_k-1} \quad (l < r < \infty). \quad (36)$$

Оберненим перетворенням Фур'є з (34), враховуючи першу крайову умову (1), маємо

$$K(z)\Phi^+(z) = \frac{m-1}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\bar{p}}{1-iz} - \int_{-\infty}^0 e^{-\xi} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} e^{iz\xi} d\xi \right). \quad (37)$$

Останню рівність перепишемо у вигляді

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\xi} \frac{\sigma_{\vartheta}}{2G} \Big|_{\vartheta=0} e^{iz\xi} d\xi = -\frac{m}{m-1} \sqrt{2\pi} K(z)\Phi^+(z) + \frac{\bar{p}}{1-iz}. \quad (38)$$

За допомогою леми Ватсона [16], з (38), (24), (27), (30) знаходимо поведінку нормальних напружень поблизу вершини тріщини

$$\sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} \sim \frac{p\sqrt{l}}{K^-(-i)\sqrt{2\pi iK'(0)(r-l)}}, \quad r \rightarrow l+0. \quad (39)$$

З (39) визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_I = \lim_{r \rightarrow l+0} \sqrt{2\pi(r-l)} \sigma_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = \frac{p\sqrt{l}}{K^-(-i)\sqrt{iK'(0)}}, \quad (40)$$

де $K^-(-i)$ визначена в другій рівності (19)

$$K^-(-i) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(s_n+1)}{s_n(\delta_n+1)}. \quad (41)$$

Вираз для K_I у декілька іншій формі, еквівалентній (40), отримано в роботі [5]. Якщо

факторизацію (18) коефіцієнта $K(z)$ виконати в інтегралах типу Коші [14], то отримаємо

$$K^{-}(-i) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2iK'(0)}} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G(t)}{t^2+1} dt\right),$$

$$G(t) = 2i \operatorname{cth} \pi t \cdot K(t). \quad (42)$$

Нормальні переміщення верхнього берега тріщини ($0 \leq r \leq l$, $\vartheta = 0$) знаходимо, виходячи з виразу

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \int_0^r \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} dr = l \int_{\xi}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi, \quad (43)$$

де $\varphi(\xi)$ визначається з (33) і з урахуванням (27), (18) приймає вигляд

$$\operatorname{res}\left(\frac{\tau \Delta(i\tau) K^{-}(\tau)}{(1-i\tau)\lambda(i\tau)} e^{-i\tau\xi}, \tau = -i\right) = -2 \frac{K^{-}(-i)}{\operatorname{tg} \alpha - \alpha} \left(\frac{\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)} - 1 - \frac{K'^{-}(-i)}{iK^{-}(-i)} + \xi \right) e^{-\xi}, \quad (45)$$

де, згідно з (19),

$$\frac{K'^{-}(-i)}{K^{-}(-i)} = \left(\ln K^{-}(z) \right)' \Big|_{z=-i} = i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s_n+1} - \frac{1}{\delta_n+1} \right). \quad (46)$$

Лишок у точці $\tau = -is_k$ ($k = 2, 3, \dots$) дорівнює

$$\operatorname{res}\left(\frac{\tau \Delta(i\tau) K^{-}(\tau)}{(1-i\tau)\lambda(i\tau)} e^{-i\tau\xi}, \tau = -is_k\right) = -\frac{s_k \Delta(s_k) K^{-}(-is_k)}{(s_k-1)\lambda'(s_k)} e^{-s_k\xi} \quad (47)$$

Записавши інтеграл з (44) у вигляді ряду за лишками підінтегральної функції, будемо мати

$$\varphi(\xi) = -2 \frac{m-1}{m} \frac{\bar{p} e^{-\xi}}{\operatorname{tg} \alpha - \alpha} \left(\frac{\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)} - 1 - \frac{K'^{-}(-i)}{iK^{-}(-i)} + \xi \right) -$$

$$- \frac{m-1}{m} \frac{\bar{p}}{K^{-}(-i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k) K^{-}(-is_k)}{(s_k-1)\lambda'(s_k)} e^{-s_k\xi}. \quad (48)$$

Інтегруючи функцію $\varphi(\xi)$ із (48) за формулою (43), знаходимо вираз для нормальних переміщень верхнього берега тріщини

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{m-1}{m} \bar{p} l \left[\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha - \alpha} \left(\ln \frac{r}{l} - \frac{\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{2(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s_n+1} - \frac{1}{\delta_n+1} \right) \right) \frac{r}{l} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{K^{-}(-i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta(s_k) K^{-}(-is_k)}{(s_k-1)\lambda'(s_k)} \left(\frac{r}{l} \right)^{s_k} \right] \quad (0 \leq r \leq l), \quad (49)$$

а також величину відхилення вершини півкліна від осі симетрії

$$h = - \int_0^l \frac{\partial u_{\vartheta}}{\partial r} \Big|_{\vartheta=0} dr = -l \int_0^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = -\sqrt{2\pi} l \Phi^{+}(0) = -\frac{m-1}{m} \frac{i \bar{p} l}{K^{+}(i)} \quad (50)$$

З першої рівності (15), завдяки оцінкам, (24), а також виразам (31), (27) маємо

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi \square - \frac{2(m-1)}{m} \frac{\bar{p}}{K^{-}(-i)\sqrt{2iK'(0)}} \frac{1}{\sqrt{-iz}}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Використовуючи лему Ватсона із (51) знаходимо

$$\varphi(\xi) \square - \frac{2(m-1)}{m} \frac{\bar{p}}{K^{-}(-i)\sqrt{2iK'(0)}} \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}, \quad \xi \rightarrow +0. \quad (52)$$

Звідси за допомогою заміни (3), (9) та виразу (40) для коефіцієнта інтенсивності напружень,

отримуємо

$$u_9|_{9=0} \sim \frac{2(m-1)}{mG} K_1 \sqrt{\frac{l-r}{2\pi}}, \quad r \rightarrow l-0, \quad (53)$$

що узгоджується з асимптотикою полів напружень і переміщень поблизу вершини тріщини [17].

Таким чином, завершено теоретичне дослідження напружено-деформованого стану клина з скінченною тріщиною поблизу його вершини.

Розглянемо частинний випадок представленої вище задачі. Якщо величина кута піврозхилу клина дорівнює $\alpha = \pi$, то клин з тріщиною переходить в площину з напівнескінченим розрізом.

При цьому рівності для $\lambda(s)$ та $\Delta(s)$ із подання розв'язку (5) мають вигляд

$$\lambda(s) = \sin \pi s, \quad \Delta(s) = 2 \cos \pi s. \quad (54)$$

Звідси, на підставі рівностей (8) і (21)

$$K(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{th} \pi z, \quad K'(0) = -\frac{\pi i}{2}. \quad (55)$$

У цьому випадку факторизація (18) коефіцієнта $K(z)$ із (55) досить просто проводиться у гамма-функціях. Використовуючи властивості гамма-функцій [18]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z} \quad (56)$$

$$K_I = 2p\sqrt{2l/\pi},$$

$$\sigma_9|_{9=0} = \frac{2p}{\sqrt{\pi^3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+3/2)}{(k+3/2)k!} \left(\frac{l}{r}\right)^{k+3/2} \quad (l < r < \infty),$$

$$u_9|_{9=0} = \frac{4}{\pi} \frac{m-1}{m} \bar{p} l \left[1 - \frac{r}{2l} \left(\ln \frac{r}{4l} + 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k-1)k!} \left(\frac{r}{l}\right)^k \right] - h \quad (0 \leq r \leq l). \quad (60)$$

Далі будемо використовувати тотожність [18]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+v)}{k!} x^k = \frac{\Gamma(v)}{(1-x)^v}, \quad (61)$$

яка безпосередньо впливає із суми біноміального ряду

$$(1-x)^v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v(v+1)\dots(v+k-1)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(v)k!} x^k. \quad (62)$$

Для цього подамо нескінченні суми із (60) у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+3/2)}{(k+3/2)k!} x_1^{k+3/2} = \int_0^{x_1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+3/2)}{k!} x^{k+1/2} \right) dx,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k-1)k!} x_2^k = x_2 \int_0^{x_2} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} x^{k-2} \right) dx, \quad (63)$$

де введені позначення $x_1 = \frac{l}{r}$, $x_2 = \frac{r}{l}$. Застосовувавши тотожність (61) до підінтегральних виразів із (63) і проінтегрувавши останні, знаходимо

і те, що функція $\Gamma(z)$ аналітична у всіх точках комплексної площини, крім своїх простих полюсів $z = -k$ ($k = 0, 1, \dots$), отримуємо

$$K(z)/z = K^+(z)K^-(z), \quad K^+(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \frac{\Gamma(1/2-iz)}{\Gamma(1-iz)},$$

$$K^-(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2+iz)}{\Gamma(1+iz)}. \quad (57)$$

Залучивши дві останні рівності маємо

$$K^+(i\delta_k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2i} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+1/2)}, \quad K^-(-i) = \frac{1}{2},$$

$$K^-(-is_k) = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi} k!}, \quad K^+(i) = \frac{\pi}{4i}. \quad (58)$$

При цьому використанні наступні властивості гамма-функції:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(k+1) = k! \quad (59)$$

і значення $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Крім того $s_k = k$ і

$\delta_k = k - 1/2$ ($k = 1, 2, \dots$), де s_k , δ_k – корені рівнянь $\lambda(s) = 0$ та $\Delta(s) = 0$.

Вносячи відповідні зміни у формули (40), (36), (49), запишемо їх наступним чином:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+3/2)}{(k+3/2)k!} x_1^{k+3/2} = \sqrt{\pi} \left(\sqrt{\frac{x_1}{1-x_1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x_1}{1-x_1}} \right),$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(k-1)k!} x_2^k = -\sqrt{\pi} \left(x_2 \ln \frac{1+\sqrt{1-x_2}}{2} + \sqrt{1-x_2} + \frac{1}{2} x_2 - 1 \right) \quad (64)$$

Підставляючи значення сум (64) у подання розв'язку (60), отримаємо остаточні вирази для напружень і переміщень у випадку площини з напівнескінченим розрізом:

$$\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{2p}{\pi} \left(\sqrt{\frac{l}{r-l}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{l}{r-l}} \right) \quad (l < r < \infty),$$

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = \frac{4}{\pi} \frac{m-1}{m} \bar{p} l \left(\sqrt{1-\frac{r}{l}} + \frac{r}{l} \ln \frac{1+\sqrt{1-r/l}}{\sqrt{r/l}} \right) - h \quad (0 \leq r \leq l). \quad (65)$$

5. Результати обчислень.

У розглянутій вище задачі у випадку, коли клин є чвертьплощиною ($\alpha = \pi/4$), обчислені безрозмірні напруження і переміщення $\bar{\sigma} = \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0}/p$ і $\bar{u} = 2G(u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} + h)/pl$ в точках осі симетрії клина. Розподіл нормальних напружень

на лінії продовження тріщини, обчислений за формулою (36), показаний на рис. 2, окружні переміщення верхнього берега тріщини (формула (49)) – на рис. 2.3. Розрахунки проведені для числа Пуассона $m = 10/3$.

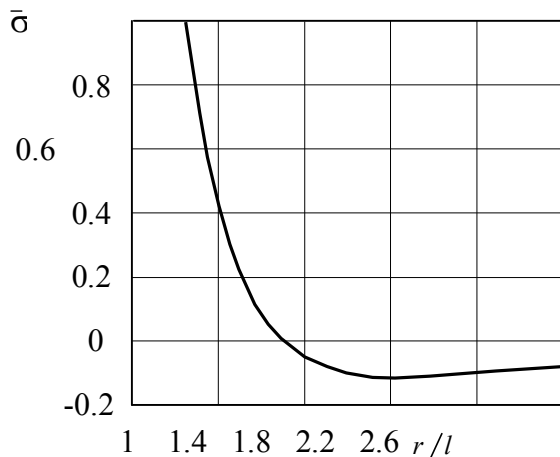


Рис. 2 Розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини

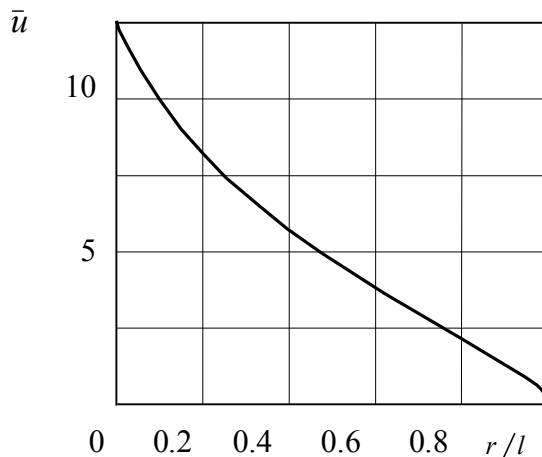


Рис. 3 Нормальні переміщення берегів тріщини

Як видно з рис 2, напруження розтягу, яке необмежене у вершині тріщини, при віддаленні від вершини змінюється напруженням стиску. Коефіцієнт інтенсивності напружень (40) у даному випадку $\alpha = \pi/4$ рівний $K_I = 3.873 p \sqrt{l}$.

У таблиці представлені значення безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень $\bar{K}_I = K_I/p\sqrt{l}$ для різних кутів піврозхилу клина α , що співпадає з результатами [5].

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів інтенсивності напружень

α	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
$\bar{K}_I$	5.0028	3.1776	2.3930	1.9881

Висновки. З використанням методу Вінера – Гопфа знайдено точний розв'язок задачі про рівновагу пружного клина з прямолінійною

скінченною тріщиною на його осі симетрії у випадку, коли бічні грані клина вільні від напружень, а на берегах тріщини, що виходить з вершини клина, діє сталий тиск. Факторизація коефіцієнта функціонального рівняння Вінера – Гопфа проведена в нескінченних добутках. Розв'язок отримано у вигляді рядів за коренями трансцендентних рівнянь. Наводяться результати обчислень коефіцієнтів інтенсивності напружень, розподіли нормальних напружень на лінії продовження тріщини, а також нормальних переміщень берегів тріщини.

Список використаної літератури:

1. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.
2. Сметанин Б. И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина / Б. И. Сметанин // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, № 4. – С. 708–714.
3. Srivastav R. P. Narain Prem. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load / R. P. Srivastav // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1965. – 61, N 4. – P. 945–954.
4. Банцури Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез / Р. Д. Банцури // Докл. АН СССР. – 1966. – 167, № 6. – С. 1256–1259.
5. Doran H. E. The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics / H. E. Doran // J. Inst. Math. and Appl. – 1969. – 5, N 4. – P. 363–372.
6. Храпков А. А. Бесконечный треугольный клин с надрезом на биссектрисе под действием сосредоточенных сил, приложенных к берегам надреза / А. А. Храпков // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 5. – С. 88–97.
7. Stone S. F. Stress intensity factors for cracked wedges / S. F. Stone, R. A. Westmann // Int. J. Solids and Struct. – 1981. – 17, N 3. – P. 345–358.
8. Gregory R. D. The edge-cracked circular disc under symmetric pin-loading / R. D. Gregory // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1979. – 85, N 3. – P. 523–538.
9. Quchterlony F. Some stress intensity factors for self-similar cracks, derived from path-independent integrals / F. Quchterlony // J. Elast. – 1978. – 8, N 3. – P. 259–271.
10. Quchterlony F. Symmetric cracking of a wedge by concentrated load / F. Quchterlony // Int. J. Eng. Sci. – 1977. – 15, N 2. – P. 109–116.
11. Wigglesworth L. A. Stress distribution in a notched plate / L. A. Wigglesworth // Mathematika. – 1957. – 4. – P. 76–96.
12. Bowie O. L. Rectangular tensile sheet with symmetric edge cracks / O. L. Bowie // J. Appl. Mech. Ser. E. – 1964. – 31, N 2. – P. 208.
13. Bowie O. L. Single edge cracks in rectangular tensile sheet / O. L. Bowie, D. M. Neal // J. Appl. Mech. Ser. E. – 1965. – 32, N 3. – P. 708.
14. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа / Нобл Б. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
15. Острик В. И. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости / В. И. Острик, А. Ф. Улитко. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
16. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды / Федорюк М. В. – М.: Наука, 1987. – 544 с.
17. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Черепанов Г. П. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
18. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 1 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1979. – 295 с.

Некислых Е.М., Баталова А.Б. Равновесие упругого клина с конечной трещиной при вершине.

С использованием метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи плоской деформации упругого клина, боковые грани которого свободны от напряжений, с прямолинейной конечной трещиной, которая исходит из вершины клина и находится на его оси симметрии. Факторизация коэффициента функционального уравнения Винера – Хопфа проведена в бесконечных произведениях. Приводятся результаты вычислений коэффициентов интенсивности напряжений, распределения нормальных напряжений на линии продолжения трещины, а также нормальных перемещений берегов трещины.

Ключевые слова: упругий клин, трещина, напряжение, метод Винера-Гопфа, факторизация.

Nekislykh Y.M., Batalova A.B. Equilibrium of elastic wedge with eventual crack at vertex.

The upshots of task of flat deformation of resilient wedge the lateral verges of which are free of tensions are close, with an eventual rectilinear crack which is on wasp of symmetry of wedge and goes out from his top got in works B. I. Smetanin, R. P. Srivastav, and exact upshots of this task – in works of H. E. Doran, A. A. Khrapkov, F. Quchterlony, R. D. Gregory, S. F. Stone, R. A. Westmann, R. D. Bancuri.

R. D. Bancuri got the decision of this task reports to the regional task of Rimana for analytical functions; thus factorization coefficient of task conducted in the integrals of type Koshi, but the results of calculations absent. In a work R. P. Srivastav a task is erected to integral equalization of Fredgol'ma of the second family, which is untied numeral. The values of closeness of integral equalization, through which as an integral of Abel the normal moving of banks of crack is expressed, are calculated. For the decision of this task B. I. Smetanin utilized the mathematical vehicle of method of Vinera – Gopfa; the thus executed is close factorization by approximation of function, that factorization.

The exact meanings of coefficients of intensity of tensions are got in works of H. E. Doran, A. A. Khrapkov, F. Quchterlony et al by the method of Vinera – Gopfa. Examined cases set on the banks of crack of permanent normal tensions in default of tangent tensions; concentrated (normal and change) forces which operate on the banks of crack; concentrated moments, enclosed in the top of wedge; concentrated forces on the banks of crack in the top of wedge.

Our purpose to get the exact decision of task of flat deformation of resilient wedge the lateral verges of which are free of tensions, with a rectilineal eventual crack which goes out from the top of wedge and located on his wasp of symmetry.

With the use of method of Vinera – Gopfa the exact decision of task is found about the equilibrium of resilient wedge with a rectilineal eventual crack on his wasp of symmetry in the case when the lateral verges of wedge are free of tensions, and on the banks of crack, that виходу from the top of wedge, permanent pressure operates. Faktorization of coefficient of functional equalization of Vinera – Gopfa is conducted in endless works. It is got Roz'yazok as rows after the roots of transcendent equalizations. Results over of calculations of coefficients of intensity of tensions are brought, distributing of normal tensions on the line of continuation of crack, and also normal moving of banks of crack.

Keywords: *elastic wedge, crack, tension, Wiener – Hopf method, factorization.*

Стаття надійшла в редакцію 23 березня 2015р.

Рецензент: д.ф.-м.н., професор Кузема О.С.