МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УДАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ЗЕРНИНИ ТА СТАЛЕВОЇ ПЛАСТИНИ

В. Ф. Сіренко, к.т.н., доцент
В. М. Зубко, к.т.н., доцент
Т. В. Кузіна, аспірантка
Сумський національний аграрний університет

Метою даної статті є вивчення можливості повного врахування розподілу механічної енергії при ударі. У пропонованій статті, велика увага приділяється аналітичній оцінці процесу ударної контактної взаємодії тіл.

Використано рівняння Герца для пружної деформації матеріалів.

***Ключові слова**: удар, енергетичний баланс, коефіцієнт відновлення щвидкості, коефіцієнт розподілу втраченої енергії, аналітична залежність.*

Проведений аналіз механіко-технологічних властивостей співударяємих тіл (зернина-сталь) показав їх значну відмінність.

До рівняння енергетичного балансу включені складові:

- величини кінетичної енергії зернини при підльоті до перешкоди у вигляді металевої пластинки та під час ударного гальмування до повної зупинки;
- потенційні енергії пружної деформації стисненого матеріалу та втрати енергії.

Підтверджено енергетичний зміст коефіцієнта відновлення щвидкості при ударі.

Втрата енергії на диссипацію розглядається як невикористана частка від повної пружної енергії . Співвідношення між цими складовими енергетичного балансу визначається на основі використання коефіцієнта відновлення швидкості.

Для врахування особливостей різних фізичних моделей втрат механічної енергії при явищі удару запроваджено коефіцієнт розподілу частин втраченої енергії між першою та другою фазами удару.

Отримана аналітична залежність величин поточної та максимальної деформацій зернини від часу із врахуванням втрат енергії на остаточні пластичні деформації під час першої та другої фаз удару. Вони є основою для технічних розрахунків параметрів удару: сили удару, ударного імпульсу, максимальних контактних напружень.

Постановка проблеми в загальному вигляді. В технічних пристроях виробництва сільськогосподарської продукції виконується обробіток твердих матеріалів органічного походження. Їх переміщення в транспортуючих і робочих машинах відбувається, найчастіше, в результаті ударної взаємодії із більш масивними, міцнішими і твердішими поверхнями деталей машин.

Від правильного і точного відображення механічних процесів при ударі в значній мірі залежить ефективність і надійність роботи сільськогосподарського обладнання.

В роботі під час опису процесу удару враховуються сумарні втрати енергії в частках продукта, що впливають на величини післяударних кінематичних параметрів. Запропоновано в математичному описі удару вводити інтегральний показник (коефіцієнт відновлення швидкості) при визначенні динамічних деформацій для більшості моделей дисипації енергії.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найбільшого поширення набула класична модель удару Ньютона [3, 5, 6, 8], за якою час удару є дуже малим. В момент удару не враховується дія інших сил і переміщень тіла. Також введено співвідношення абсолютних величин швидкостей тіла до удару і після удару (коефіцієнт відновлення швидкості), який легко визначається експериментальним шляхом і є виміром повної втрати енергії. Але стехіометричний підхід не описує динамічний процес і не визначає сили, що виникають при взаємодії тіл, їх тривалість, деформованість поверхонь.

Лінійна в'язко-пружна модель використовується при визначенні динамічних навантажень в опорі матеріалів [7], обмежується тільки визначенням максимальних зусиль в елементах конструкцій. Найкращі результати дає при описі продольних деформацій стержнів і зовсім не враховує контактних напружень при иударі тіл різної конфігурації.

Для поверхонь контактів, що описуються рівняннями другого порядку абсолютно пружних тіл застосовується нелінійне співвідношення між навантаженням і деформаціями в статичному стані – теорія Герца [9]. Рівняння руху тіл під час удару має аналітичний розв'язок [6,9] .

Втрата енергії за хвильовою теорією удару [6,8], при відсутності остаточних деформацій, відбувається при проходженні пружних хвиль деформацій в матеріалі. Теорія має обмеження із-за розмірів тіла.

Доповненням теорії удару Герца є дослідження процесів втрати енергії в тілах, що співударяються. В останніх роботах Лапшина В.В. [1,2,4] досліджуються моделі із в'язко-пружними властивостями, наявністю сухого тертя, як всередині матеріалу так і на поверхнях контакту тіл, що співударяються.

Ці моделі дають більш точний підхід до опису фізичних процесів, але для практичного застосування потребують експериментального визначення нових фізичних параметрів – коефіцієнт затухання хвиль, коефіцієнта в'язкості або сухого тертя.

Формування цілей та завдання статті. Отримати математичний апарат придатний для інженерного розрахунку процесів удару тіл із матеріалів органічного походження та деталей металевих конструкцій.

Виклад основного матеріалу дослідження. Технічні характеристики тіл, що співударяються.

Табл.1

Параметр		Зернина (1)	Пластина (2)
Матеріал		Сорт «Богдана»	Сталь вуглецева Ст. 30
Розміри, мм.	Довжина	7	80
	Ширина	5	60
	Товщина	3	0,8
	Заокруглення, мм	2; 12	∞
Густина, кг/м^3		1300	7800
Модуль пружності, МПа		160	200000
Маса, грам		0,043	30

Із наведених даних, в табл.1, можна відмітити, що радіус кривизни пластини $R_2 = \infty$;

Модуль пружності : $E_1 << E_2$

Маса тіл $m_1 << m_2$.

Масогабаритні та фізико-механічні показники в табл. 1 взяті із [10] і власних досліджень.

Для виявлення закономірностей із зміни параметрів ударного процесу складаємо баланс механічної енергії (1). Величина початкової кінетичної енергії зернини $E_{поч}$ розподіляється по складовим

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + W(\delta) + E_{втр}(\delta) = E\text{поч} \quad (1).$$

Початкова енергія зернини визначається швидкістю наближення її центра ваги до площини

$$E_{поч} = \frac{mV_n^2}{2}, \quad (2)$$

V_n – початкова швидкість зернини, м\с.

Абсолютну величину втрат енергії при стисканні – розтисканні пов'язуємо із коефіцієнтом відновлення швидкості ε.

$$\varepsilon = \frac{V_k}{V_n} = \sqrt{\frac{2gh_k}{2gH_n}} = \sqrt{\frac{h_k}{H_n}}, \quad (3)$$

$V = \varepsilon V_n$ – швидкість зернини.

Кінцеве значення кінетичної енергії

$$E_k = \frac{m}{2}(\varepsilon V_n)^2, \quad (4)$$

Величина втраченої енергії

$$E_{втр} = E_n - E_k = \frac{m}{2}(V_n^2 - \varepsilon^2 V_n^2) = \frac{mV_n^2}{2}(1-\varepsilon^2), \quad (5)$$

Після контакту зернини з плоскою поверхнею, швидкість її руху і величина кінетичної енергії $\frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2$ зменшується.

Основний від деформації в зоні контакту пружно-пластичного тіла з більш пружною опорою є пружним.

Зона деформованої частини зернини набуває потенційної енергії у відповідності із формулою [6]

$$W(\delta) = \delta^{5\backslash 2}\frac{2}{5k}\left(\frac{R_3 R_{пл}}{R+R_{пл}}\right)^{1\backslash 2}, \quad (6)$$

де $k = \frac{3}{4}\left(\frac{1-\mu_3^2}{E_3} + \frac{1-\mu_{пл}^2}{E_{ст}}\right)$, (7)

$\mu_з, \mu_{пл}$ –коефіцієнти Пуасона; $E_з, E_{пл}$ – модулі пружності зернини і пластини, відповідно.

Також, зважаючи на структуру поверхонь контактуючих тіл, зокрема, поверхні зернини, слід відмітити, що внаслідок зближення відносно невеликих об'ємів нерівностей, які складають $\sim 0{,}1$ частку від всієї поверхні, пластичні деформації в матеріалі (виступах) зернини виникають із самого початку контакту. Тим більше, розрахунки показують, що висота мікронерівностей має однаковий порядок величин із висотою виступів. При такому взаємопов'язаному процесі має сенс виражати величину втрат енергії, зокрема в нашому випадку, для пластичного деформування, як частку від затрат на пружну деформацію.

$$\frac{E_{втр}}{W} = \frac{2mV_n^2(1-\varepsilon^2)}{2mV_n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} - 1, \quad (8)$$

Після підстановки всіх значень величин із табл. 1, властивостей матеріалів і деталей в балансове співвідношення (1), отримуємо рівняння

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \delta^{5\backslash 2}\frac{2\sqrt{R}}{5k} + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1^2\right)\delta^{5\backslash 2}\frac{2\sqrt{R}}{5k} = \frac{mV_{поч}^2}{2}, \quad (9),$$

яке придатне для визначення величини деформацій і їх залежності від часу, для першої фази удару – стиску матеріалу зернини в пружньо-пластичній моделі, коли остаточна деформація виникає лише під час першої фази. За іншими моделями і умовами ударів дисипація енергії відбувається на протязі двох фаз, тоді необхідно ввести коефіцієнт α - розподілу втраченої енергії по фазам.

Після групувань і введення α на першій стадії, або (1-α) на другій стадії, маємо:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \left[1 + \alpha\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)\right]\frac{2\sqrt{R}}{5k}\delta^{5\backslash 2} = \frac{mV_{поч}^2}{2}, \quad (10),$$

або

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \left[\frac{1-\alpha}{\varepsilon^2} + \alpha\right]\frac{2\sqrt{R}}{5k}\delta^{5\backslash 2} = \frac{mV_{поч}^2}{2}, \quad (11)$$

Вихідне рівняння (9) після групувань та підстановки складових для умови повного утворення остаточних (пластичних) деформацій в першій фазі удару $\alpha = 1$ і скорочення на

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \frac{4\sqrt{R}\,E_3\delta^{5\backslash 2}}{5-(1-\mu_3^2)m\varepsilon^2} = V_n^2. \quad (12).$$

Константу при $\delta^{5\backslash 2}$ позначимо через

$$\omega = \frac{4\sqrt{R}\,E}{5-(1-\mu_3^2)m\varepsilon^2}\ , \qquad (13).$$

Рівняння (9) після підстановки ω:

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \omega\delta^{5\backslash 2} = V_n^2, \qquad (14)$$

має початкову умову в кінці взаємодії зернини і площини швидкість матеріалу дорівнює

$$\frac{d\delta}{dt} = 0, \qquad (15)$$

А $\delta_{max} = \left(\frac{V_n^2}{\omega}\right)^{2\backslash 5}$, $\qquad (16)$

Рішенням рівняння для першої фази – стиснення є

$$t_1 = \int_0^{\delta_{max}} \frac{d\delta}{\sqrt{V_n^2 - \omega\delta^{5\backslash 2}}} = 1{,}47\left(\frac{1}{\omega^2 V_n^2}\right)^{1\backslash 5}, \qquad (17)$$

Для другої фази рішення рівняння (18) при повній енергії, що дорівнює

$E_n = \frac{mV_k^2}{2}$ і $\varepsilon = 1$; де $V_k = \varepsilon V_n$.

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \frac{4\sqrt{R}\,E_3\delta^{5\backslash 2}}{5(1-\mu_3^2)m} = V_k^2, \qquad (18)$$

маємо подібне рішення, якщо $\frac{4\sqrt{R}\,E}{5-(1-\mu_3^2)m} = \gamma$, то

$$t_2 = 1{,}47\left(\frac{1}{\gamma^2 V_k}\right)^{1\backslash 5}, \qquad (19).$$

Величина максимальної деформації отримана із рівняння (10) в розгорнутому вигляді для першої фази удару, якщо $\alpha = 1$ має вираз

$$\delta_{max} = \left(V_n^2 \frac{5(1-\mu_3^2)m\varepsilon^2}{4\sqrt{R}\,E_3}\right)^{2\backslash 5}, \qquad (20)$$

Із якого можна зробити висновок, що $\delta_{max} = f(\varepsilon^{4\backslash 5})$.

Тобто, величина найбільшої деформації майже прямо пропорційна коефіцієнту відновлення швидкості. Найбільше зближення тіл при ударі буде коли $\varepsilon = 1$ (абсолютно пружний удар).

Для другої фази удару із рівняння при пружно-пластичному ударі процес буде протікати у зворотньому порядку, як для чисто пружного удару (за теорією Герца). Повна енергія дорівнює кінетичній при $V_k = \varepsilon V_n$, тому вираз для максимальної деформації можна підрахувати із (20).

Тривалість першої фази стиснення із втратами енергії на остаточні деформації із (19)

$$t_1 = \left(\frac{1}{\omega^2 V_n}\right)^{1\backslash 5} = \left(\frac{25(1-\mu^2)^2 m^2\varepsilon^4}{16RE^2 V\text{п}}\right)^{1\backslash 5}, \qquad (21)$$

де коефіцієнт $\omega = \frac{4\sqrt{R}\,E}{5(1-\mu^2)m\varepsilon^2}$,

Тривалість другої фази повернення зернини в зворотньому напрямку за формулою (19).

В цій фазі за нашою пружно-пластичною моделлю втрати енергії відсутні, тому підставляємо значення:

$\gamma = \frac{4\sqrt{R}\,E}{5(1-\mu_3^2)m}$, $V_k = \varepsilon V_n$, і отримуємо

$$t_2 = 1{,}47\left(\frac{1}{\gamma^2 V_k}\right)^{1\backslash 5} = 1{,}47\left(\frac{25(1-\mu^2)^2 m^2}{16RE^2\varepsilon V_n}\right)^{1\backslash 5} \qquad (22)$$

Для визначення аналітичної залежності величини деформації від часу скористаємося виразом із [4].

$$(t) = \delta_{max}\sin\left(\frac{1{,}068V}{\delta_{max}}t\right), \qquad (23)$$

У виразі [5] для $\delta = f(p)$ наведена залежність деформації від зусилля P.

$$\delta = 0{,}8255\sqrt[3]{\frac{P^2}{R}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}, \qquad (24)$$

зважаючи на дані із таблиці 1, що $E_2 >> E_1$ і після піднесення до 3 ступеня

$$\delta^3 = 0{,}5625\frac{P^2}{R}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}\right)^2, \qquad (25)$$

$$P^2 = \frac{R\delta^3}{0{,}5625(1-\mu_1^2)^2} = \frac{\sqrt{R}\delta\sqrt{\delta}E}{\sqrt{0{,}5625}\,(1-\mu_1^2)} = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}\text{м}^2\right], \text{Н}, \qquad (26)$$

маємо початкову залежність, яка закладена в формулі Герца P=f$(\delta)^{3\backslash 2}$.

Залежність сили від часу отримаємо після підстановки $\delta(t) = f(t)$.

$$P_{(t)} = \frac{E}{(1-\mu_1^2)}\sqrt{\frac{R}{0{,}5625}}\,\delta_{max}^{3\backslash 2}\sin^{3\backslash 2}\left(\frac{1{,}068V}{\delta_{max}}t\right), \qquad (27)$$

Тепер можна отримати уточнене значення імпульсу сили P(t), що дорівнює

$$\int_0^{t_1} P(t)dt = \frac{E}{(1-\mu_1^2)}\sqrt{\frac{R}{0{,}5625}}\,\delta_{max}^{3\backslash 2}\sin^{3\backslash 2}\left(\frac{1{,}068V}{\delta_{max}}t\right)dt = \frac{E}{1-\mu_1^2}\sqrt{\frac{R}{0{,}5625}}\,\delta_{max}^{3\backslash 2}\int_0^{t_1}\sin^{3\backslash 2}\left(\frac{1{,}068V}{\delta_{max}}t\right)dt. \qquad (28)$$

Висновки

1) Введена величина експериментального визначаємого коефіцієнта відновлення швидкості ε в рівняння балансу механічної енергії для тіла, що знаходиться в процесі удару.

2) Отримані рішення показують розподіл енергії між пружними деформаціями та величиною втрат енергії на протязі всього процесу ударної взаємодії зернини та металевих деталей конструкції.

3) Встановлений зв'язок між коефіцієнтом відновлення швидкості та величинами максимальних деформацій.

4) Отримані рівняння для підрахунків параметрів удару, зокрема, імпульсу сили, тривалості фаз і т.п. при різних моделях втрат енергії всередині деформованого матеріалу.

Список використаноъ літератури:

1. Н.А. Кильчевский Динамическое контактное сжатие тел. Издательство «Наукова думка», Киев, 1976
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е, доп. И переработ. Л., «Машиностроение» (Ленингр. Отд-Ние), 1976. 320 с. с пл.
3. Введение в теорию механического удара. Пановко Я.Г., Главная редакция физико-матитатической литературы издательства «Наука», М., 1977, 224 стр.
4. Гольдсмит В. Удар. Теоретические и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
5. Г.С. Писаренко., А.П. Яковлев., В.В. Матвеев. Справочник по сопротивлению материалов. К: Наукова думка, 1987. – 734 с.
6. Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. В 10-ти томах. Т VII. Теория упругости: Учебн. Пособие. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., - 1987. -248 с.
7. Лапшин В.В. Удар тела о препятствие. Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1134.html
8. Боровин Г.К., Дягель Р.В., Лашин В.В. Нелинейна вязоупругая модель коллинеарного удара // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2008. № 53. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-53
9. Боровин Г.К., Лапшин В.В., Юрин Е.А. Нелинейная модель коллинеального удара с сухим трением // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2014. № 46. 14 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-46
10. О.М. Царенко, Д.Г. Войтюк, В.М. Швайко та ін.; За ред. С.С. Яцуна. Механіко-технологічні властивості сільськогосподарських матеріалів: Підручник – К: Мета, 2003. – 448 с.: іл.

Сиренко В.Ф., Зубко В.Н., Кузина Т.В. Математическая модель ударного взаимодействия зерна и стальной пластины

Проведенный анализ механико-технологических свойств соударяємих тел (зерно-сталь) показал их значительное различие.

В уравнение энергетического баланса включены следующие составляющие:

- величина кинетической энергии зерна при подлете к препятствию в виде металлической пластинки и во время ударного торможения до полной остановки;

- потенциальные энергия упругой деформации сжатого материала и потери энергии.

Подтвержден энергетический смысл коэффициента восстановления скорости при ударе.

Потеря энергии на диссипацию рассматривается как неиспользованная часть от полной упругой энергии. Соотношение между этими составляющими энергетического баланса определяется на основе использования коэффициента восстановления скорости.

Для учета особенностей различных физических моделей потерь механической энергии при явлении удара введен коэффициент распределения частей потерянной энергии между первой и второй фазами удара.

Получена аналитическая зависимость величин текущей и максимальной деформаций зерна от времени с учетом потерь энергии на окончательные пластические деформации во время первой и второй фаз удара, которая входит в основные выражения для технических расчетов параметров удара: силы удара, ударного импульса, максимальных контактных напряжений.

Ключевые слова: удар, энергетический баланс, коэффициент восстановления скорости, коэффициент распределения потерянной энергии, аналитическая зависимость.

Sirenko V.F., Zubko V.N., Kuzina T.V. A mathematical model of shock interaction of grain and steel plate

The analysis of the mechanical and technological properties couderay bodies (grain , steel) showed their significant difference.

Equation of energy balance included the following components:

- kinetic energy of the grain when approaching the obstacle in the form of a metal plate and during impact deceleration to a full stop;

the potential energy of elastic strain of the compressed material and energy loss.

Confirmed energy the meaning of the coefficient of restitution of the velocity at impact.

The energy loss by dissipation is considered as the unused part of the total elastic energy . The ratio between these components of the energy balance is determined on the basis of the coefficient of restitution of the velocity.

To account for the characteristics of different physical models of the loss of mechanical energy *during the impact phenomenon is introduced the distribution coefficient of the parts of the energy lost between the first and second phases of the impact.*

The relationship of the current values and the maximum deformation of grain from time to time taking into account the energy loss on the final plastic deformation during the first and second phases of the impact, which is included in the basic expressions for engineering calculations of parameters of shock: the impact force, impulse, maximum contact stresses.

Keywords: impact, energy balance, rescue rate, loss ratio, analytical dependence.