

ТРИ РІВНЯННЯ ТРАЄКТОРІЇ НЕУСТАЛЕНОГО РУХУ КОЛІСНОЇ МАШИНИ

Доцент, канд. техн. наук Б. Я. Татьянченко
кафедри технічного сервісу,
аспірантка Сіренко Ю. В. кафедри тракторів т с.г. машин
Інженерно-технологічний факультет
Сумський національний аграрний університет, Суми, Україна

Отримані три види рівнянь в параметричній формі для траєкторії неусталеного руху чотирьохколійної машини з передніми керованими колесами у функції кута повороту корпусу машини і в функції часу, а також рівняння колового руху. На базі цих рівнянь проведені теоретичні дослідження всіх можливих видів криволінійного руху: вхід в лівий або правий поворот, вихід з поворотів і коловий рух обох напрямків. Розроблено спосіб спряження окремих ділянок складної траєкторії, що має місце під час розвороту машино-тракторного агрегату (МТА) на полі. Вирішені окремі задачі, пов'язані з виходом машини на задані координати, визначенням центрів кривизни. Результатами роботи можна скористатися для планування розворотів МТА при виконанні сільськогосподарських робіт або для автоматичного управління агрегатами і машинами.

Ключові слова: *чотирьохколійна машина, траєкторія руху, рівняння руху, поворот, передні керовані колеса, курсовий кут, кут повороту.*

Вступ. Дослідження умов криволінійного руху машин має важливе практичне значення. Криволінійний рух суттєво відрізняється від прямолінійного руху. Як правило, кінематичні і динамічні умови роботи значно ускладнюються, що потребує вивчення багатьох додаткових факторів, які впливають на керованість, стійкість і надійність руху машини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання криволінійного руху машин розглядалося в роботах В.І. Поддубного, В.Я. Аніловича, Ю.Т. Водолажченка, С.М. Григор'єва, І.Є. Кавчинського та ін. В роботі [1] приводяться результати математичного моделювання руху транспортного засобу з метою встановлення оптимальних конструктивних параметрів при виконанні певних технічних операцій. В роботах [2, 3] вивчається кінематика довільно розташованої опори (колеса або гусениці) через визначення руху миттєвого центра швидкості. Відомі також спроби аналізу силової взаємодії колеса або гусениці з ґрунтом під час повороту [4, 5]. Незважаючи на значну кількість робіт, присвячених криволінійному руху машин, слід відмітити, що це явище вивчене ще в недостатній мірі. Особливо відчувається потреба у визначенні траєкторії руху за допомогою аналітичних рівнянь, що дало б можливість створювати відповідні програми управління рухом машин по криволінійним траєкторіям.

Постановка задачі. В даній статті зроблена спроба описати криволінійну траєкторію чотирьохколійної машини з передніми керованими колесами за

допомогою параметричних рівнянь у функції кута повороту корпусу машини φ та в функції часу t .

Виклад основного матеріалу. В роботі [6] отримані рівняння в параметричній формі для траєкторії неусталеного руху чотирьохколісної машини з передніми керованими колесами у функції кута повороту корпусу машини φ , які описують вхід в поворот і вихід з повороту лівого і правого напрямків. В правій декартовій системі координат рівняння для центра мас машини C (рис. 1) наведені у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} &= \lambda \left[-\frac{(1+k)^2}{4k} \varphi^2 + \frac{\alpha_0(1-k^2)}{2k^2} \varphi - \frac{\alpha_0^2 - 2k^2}{2k^3} \lambda \ln \left| \frac{\alpha_0 + k\varphi}{\alpha_1} \right| \right]; \\ y &= \lambda \left[\frac{(1+k)}{k} \varphi - \frac{\alpha_0}{k^2} \lambda \ln \left| \frac{\alpha_0 + k\varphi}{\alpha_1} \right| \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут ℓ - відстань від центра ваги до задньої осі машини; α_0 - початкове значення курсового кута α , що відповідає часу $t=0$ або точці $(x=0; y=0)$; k - коефіцієнт інтенсивності зміни кута α , який приймається додатнім при вході в поворот і від'ємним на ділянці виходу з повороту. При виводі цих рівнянь було прийнято лінійний закон зміни курсового кута:

$$\alpha = \alpha_0 + k\varphi. \quad (2)$$

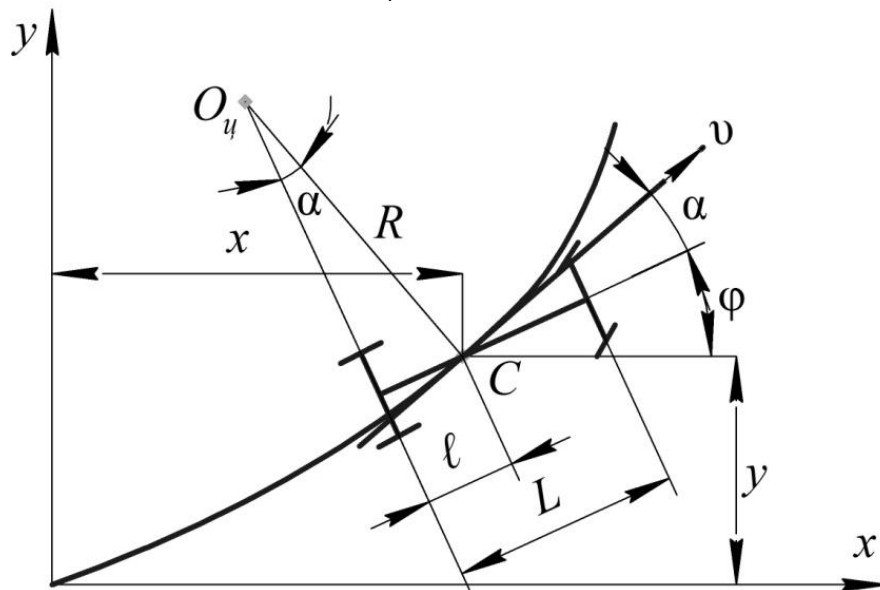


Рисунок 1 - Траєкторія входу в лівий поворот.

При постійній швидкості v елементарна дуга: $dS = R d\varphi = v dt$, де R - радіус кривизни траєкторії. Після інтегрування цього рівняння і визначення постійної з умови ($\varphi=0, t=0$) з урахуванням (2) отримаємо:

$$t = \frac{\lambda}{vk} \lambda \ln \left| \frac{\alpha_0 + k\varphi}{\alpha_0} \right| \text{ або } \varphi = \frac{\alpha_0}{k} \left(e^{\frac{k\lambda t}{v}} - 1 \right). \quad (3)$$

Рівняння (1) дозволяють визначати траєкторії неусталеного руху незалежно від швидкості v , яка опосередньо враховується аргументом φ . Але практичне відтворення траєкторій ускладнюється в зв'язку з непростим законом зміни φ в часу. За цих причин доцільно рівняння (1) записати через аргумент t , скориставшись залежністю (3):

$$x = \lambda \left[-\frac{\alpha_o^2(1+k)^2}{4k^3} \left(e^{\frac{k\lambda t}{\lambda}} - 1 \right) + \frac{\alpha_o^2(1-k^2)}{2k^3} \left(e^{\frac{k\lambda t}{\lambda}} - 1 \right) - \frac{\alpha_o^2 - 2k^2}{2k^2\lambda} vt \right];$$

$$y = \lambda \left[\frac{\alpha_o(1+k)}{k^2} \left(e^{\frac{k\lambda t}{\lambda}} - 1 \right) - \frac{\alpha_o}{k} \cdot \frac{vt}{\lambda} \right]. \quad (4)$$

Рівняння (1) і (4) абсолютно ідентичні, лише записані у функції різних аргументів. Рівняння (4) дозволяють досліджувати повороти і розвороти машин і агрегатів у функції часу і отримувати всі параметри руху (координати x і y , кути α і φ , радіус кривизни R , шлях $S=vt$) відповідно до кута повороту керма або керованих коліс. На рис. 2 наведені траєкторії входу в лівий поворот і виходу з повороту трактора МТЗ-82 ($\ell=0,93$ м; $v=1$ м/с): вхід в поворот ($\alpha_o=2^\circ$, $\alpha_k=17^\circ$, $\varphi_o=0^\circ$, $\varphi_k=30^\circ$, $k=0,5$) і вихід з повороту ($\alpha_o=17^\circ$, $\alpha_k=2^\circ$, $\varphi_o=0^\circ$, $\varphi_k=30^\circ$, $k=-0,5$) в системі координат x_1y_1 .

Для перерахування координат x_2y_2 в систему координат xu використовувалися формули:

$$\begin{aligned} \tilde{o} &= x_o + \tilde{o}_2 \cos\theta - y_2 \sin\theta; \\ y &= y_o + y_2 \cos\theta + x_2 \sin\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

де x_o , y_o – координати кінцевої точки траєкторії входу в поворот; θ – кут повороту осей системи координат x_2y_2 відносно системи координат xu .

В роботі [7] отримані нові рівняння для траєкторії неусталеного руху чотирьохколісної машини:

$$\begin{aligned} \tilde{o} &= vt \left[\left(1 - \frac{1}{2} \alpha_o^2 \right) - \frac{1}{2} \alpha_o \left(k + \alpha_o \frac{v}{\lambda} \right) t - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} k^2 + \alpha_o k \frac{v}{\lambda} + \frac{1}{3} \alpha_o^2 \frac{v^2}{\lambda^2} \right) t^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} k \frac{v}{\lambda} \left(k + \alpha_o \frac{v}{\lambda} \right) t^3 - \frac{1}{40} k^2 \frac{v^2}{\lambda^2} t^4 \right]; \\ y &= vt \left[\alpha_o + \frac{1}{2} \left(k + \alpha_o \frac{v}{\lambda} \right) t + \frac{1}{6} k \frac{v}{\lambda} t^2 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут функція курсового кута прийнята в залежності від часу t :

$$\alpha = \alpha_o + kt, \quad (7)$$

де коефіцієнт інтенсивності зміни курсового кута k має розмірність c^{-1} , а співвідношення між φ і t згідно з наведеним вище виразом для елементарної дуги траєкторії будуть:

$$\varphi = \frac{v}{\lambda} \left(\alpha_o t + \frac{1}{2} kt^2 \right); \quad t = -\frac{\alpha_o}{k} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_o}{k} \right)^2 + \frac{2\lambda}{vk} \varphi}. \quad (8)$$

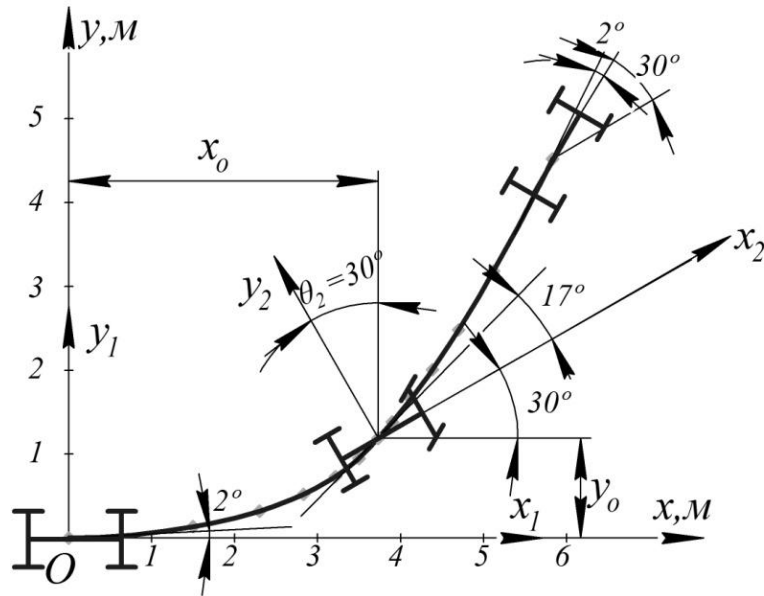


Рисунок 2 - Траєкторії входу в лівий поворот і виходу з повороту.

При побудові складних траєкторій, наприклад, під час розвороту МТА на полі, необхідно виконувати спряження окремих ділянок, забезпечувати наперед задані координати центрів кривизни або вихід на задані координати x_k і y_k . В останньому випадку ці координати треба підставити у рівняння (6) і перерахувати поточні координати (x_i, y_i) довільної системи координат $x_i y_i$ в загальну систему координат $x y$. В результаті отримаємо два квадратних рівняння:

$$a_1 \hat{e}^2 + b_1 \hat{e} + \tilde{n}_1 = 0; \quad a_2 \hat{e}^2 + b_2 \hat{e} + \tilde{n}_2 = 0, \quad (9)$$

де $\hat{a}_1 = -m \cos \theta_i$; $b_1 = -n \sin \theta_i - p \cos \theta_i$; $c_1 = x_{oi} - x_{\hat{e}} + q \cos \theta_i - r \sin \theta_i$;

$a_2 = -m \sin \theta_i$; $b_2 = n \cos \theta_i - p \sin \theta_i$; $c_2 = y_{oi} - y_{\hat{e}} - q \sin \theta_i + r \cos \theta_i$;

$$m = \frac{1}{2} v t^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} v t \left(1 + \frac{v t}{5 \lambda^2} \right) \right]; \quad n = \frac{1}{2} v t^2 \left(1 + \frac{v t}{3 \lambda} \right);$$

$$p = \frac{1}{2} \alpha_o v t^2 \left[1 + \frac{v t}{\lambda} \left(1 + \frac{v t}{4 \lambda} \right) \right]; \quad q = v t \left\{ 1 - \frac{\alpha_o}{2} \left[1 + \frac{\alpha_o}{\lambda} v t \left(1 + \frac{v t}{3 \lambda} \right) \right] \right\};$$

$$r = \alpha_o v t \left(1 + \frac{1}{2 \lambda} v t \right).$$

При знаходженні коренів рівнянь (9) слід врахувати, що на ділянці входу в лівий поворот коефіцієнт k додатній, а на ділянці виходу з лівого повороту - від'ємний. Перше рівняння системи (9) дає коефіцієнт k_x , який задовольняє рівнянню абсциси x при всіх реальних значеннях параметра t , а з другого рівняння отримаємо коефіцієнт k_y для ординати y . Далі, треба знайти час t , при якому має місце рівність $k_x = k_y = k$.

Для розглянутого вище прикладу розрахунки дають: на ділянці входу в лівий поворот $k=0,0396151 \text{ c}^{-1}$; $t=3,954352 \text{ c}$, а на ділянці виходу з повороту $k=-0,02815 \text{ c}^{-1}$; $t=4,0075 \text{ c}$. Результати розрахунків наведені в таблиці 3.

Запропонований метод розрахунку k і t використовується у випадках, коли треба вийти в кінці траєкторії на задані координати x_k і y_k , незалежно від інших параметрів траєкторії. Якщо ж відомі α_o , v , φ_k і час t , то коефіцієнт k можна знайти безпосередньо із залежності (7).

В таблицях 1, 2, 3 наведені координати (в метрах) точок траєкторії входу в лівий поворот і виходу з повороту, визначені відповідно за рівняннями (1, 4, 6).

Таблиця 1 - Результати розрахунків за рівняннями (1).

| № з/п | $\varphi, \text{рад.}$ | $t, \text{с}$ | Вхід: $\alpha_o=2^\circ, \alpha_k=17^\circ, k=0,5$ | | | Вихід: $\alpha_o=17^\circ, \alpha_k=2^\circ, k=-0,5$ | | |
|-------|------------------------|---------------|--|---------|--------|--|--------|--------|
| | | | $x=x_1$ | $y=y_1$ | x_2 | y_2 | x | y |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,7098 | 1,1823 |
| 2 | 0,0872 | 1,5090 | 1,5009 | 0,1381 | 0,2808 | 0,0944 | 3,9058 | 1,4044 |
| 3 | 0,1744 | 2,3310 | 2,3311 | 0,3241 | 0,6096 | 0,2220 | 4,1268 | 1,6793 |
| 4 | 0,2624 | 2,9009 | 2,8322 | 0,5278 | 1,0082 | 0,3986 | 4,3838 | 2,0315 |
| 5 | 0,3489 | 3,3337 | 3,2142 | 0,7408 | 1,5186 | 0,6544 | 4,6980 | 2,5081 |
| 6 | 0,4361 | 3,6857 | 3,4979 | 0,9596 | 2,2399 | 1,0607 | 5,1197 | 3,2205 |
| 7 | 0,5233 | 3,9802 | 3,7097 | 1,1823 | 3,5287 | 1,8742 | 5,8295 | 4,5692 |

Таблиця 2 - Результати розрахунків за рівняннями (4).

| № з/п | Вхід: $\alpha_o=2^\circ, \alpha_k=17^\circ, k=0,5$ | | | Вихід: $\alpha_o=17^\circ, \alpha_k=2^\circ, k=-0,5$ | | | | |
|-------|--|---------|---------|--|--------|--------|--------|--------|
| | $t, \text{с}$ | $x=x_1$ | $y=y_1$ | $t, \text{с}$ | x_2 | y_2 | x | y |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,7098 | 1,1823 |
| 2 | 1,5083 | 1,5009 | 0,1381 | 0,2958 | 0,2808 | 0,0944 | 3,9058 | 1,4044 |
| 3 | 2,3301 | 2,3011 | 0,3241 | 0,6478 | 0,6096 | 0,2220 | 4,1268 | 1,6793 |
| 4 | 2,8981 | 2,8322 | 0,5278 | 1,0824 | 1,0082 | 0,3986 | 4,3838 | 2,0315 |
| 5 | 3,3327 | 3,2142 | 0,7409 | 1,6504 | 1,5186 | 0,6544 | 4,6980 | 2,5081 |
| 6 | 3,6847 | 3,4979 | 0,9596 | 2,4722 | 2,2399 | 1,0607 | 5,1198 | 3,2205 |
| 7 | 3,9805 | 3,7097 | 1,1823 | 3,9805 | 3,5287 | 1,8742 | 5,8295 | 4,5692 |

Таблиця 3 - Результати розрахунків за рівняннями (6).

| № з/п | Вхід: $\alpha_o=2^\circ, \alpha_k=10,97^\circ, k=0,0396151 \text{ c}^{-1}$ | | | Вихід: $\alpha_o=10,97^\circ, \alpha_k=4,55^\circ, k=-0,02815 \text{ c}^{-1}$ | | | | |
|-------|--|---------|---------|---|--------|--------|--------|--------|
| | $t, \text{с}$ | $x=x_1$ | $y=y_1$ | $t, \text{с}$ | x_2 | y_2 | x | y |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,7274 | 1,1797 |
| 2 | 1,5083 | 1,4986 | 0,1647 | 0,2958 | 0,2888 | 0,0643 | 3,9536 | 1,3704 |
| 3 | 2,33014 | 2,2935 | 0,3805 | 0,6478 | 0,6281 | 0,1600 | 4,2100 | 1,6123 |
| 4 | 2,89815 | 2,8236 | 0,5978 | 1,0824 | 1,0396 | 0,3052 | 4,5077 | 1,9315 |
| 5 | 3,3327 | 3,2111 | 0,8073 | 1,6504 | 1,5648 | 0,5358 | 4,8664 | 2,3791 |
| 6 | 3,6847 | 3,5099 | 1,0072 | 2,4722 | 2,2996 | 0,9413 | 5,3302 | 3,0788 |
| 7 | 3,9541 | 3,7274 | 1,1797 | 4,0059 | 3,5132 | 1,8722 | 6,0634 | 4,5119 |

На рисунку 3 показана графічна інтерпретація пошуку коефіцієнтів k і часу t , які відповідають виходу на обумовлені координати x_k і y_k в кінці кожного маневру. Лінії x_k і y_k є геометричними місцями значень коефіцієнта k у функції часу t , які дають шуканий результат. Слід зауважити, що графічне рішення не може забезпечити належну точність визначення цих параметрів, тому для вирішення задачі отримання заданих координат в кінці ділянки треба

скористатися формулами (9). Метод послідовних наближень дає результат з будь-якою точністю.

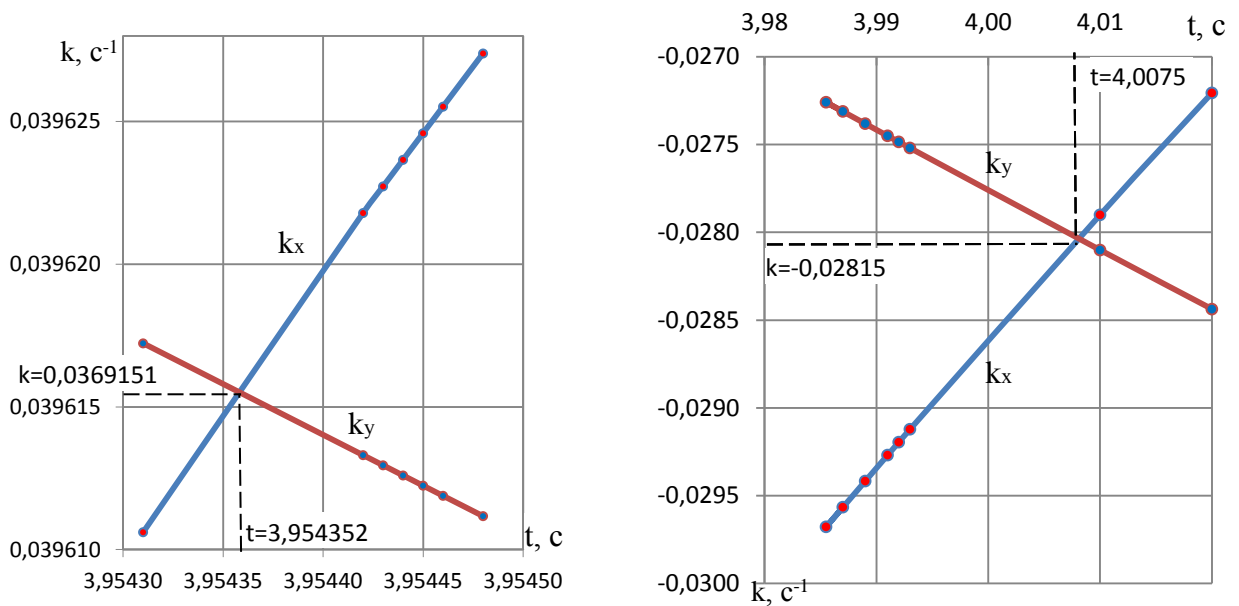


Рисунок 3 - До визначення k і t на ділянці входу в лівий поворот і на ділянці виходу з лівого повороту.

На рисунку 4 наведені траєкторії входу в лівий поворот трактора МТЗ-82, визначені за допомогою рівнянь (6). Тут 1, 2 і 5 – колові траєкторії з радіусом кола 3,55 м; 5,33 м і 26,66 м відповідно. Крива 3 – вхід в поворот із змінним курсовим кутом і радіусом кривизни траєкторії, а лінія 6 означає прямолінійний рух з постійною швидкістю $v=1$ м/с.

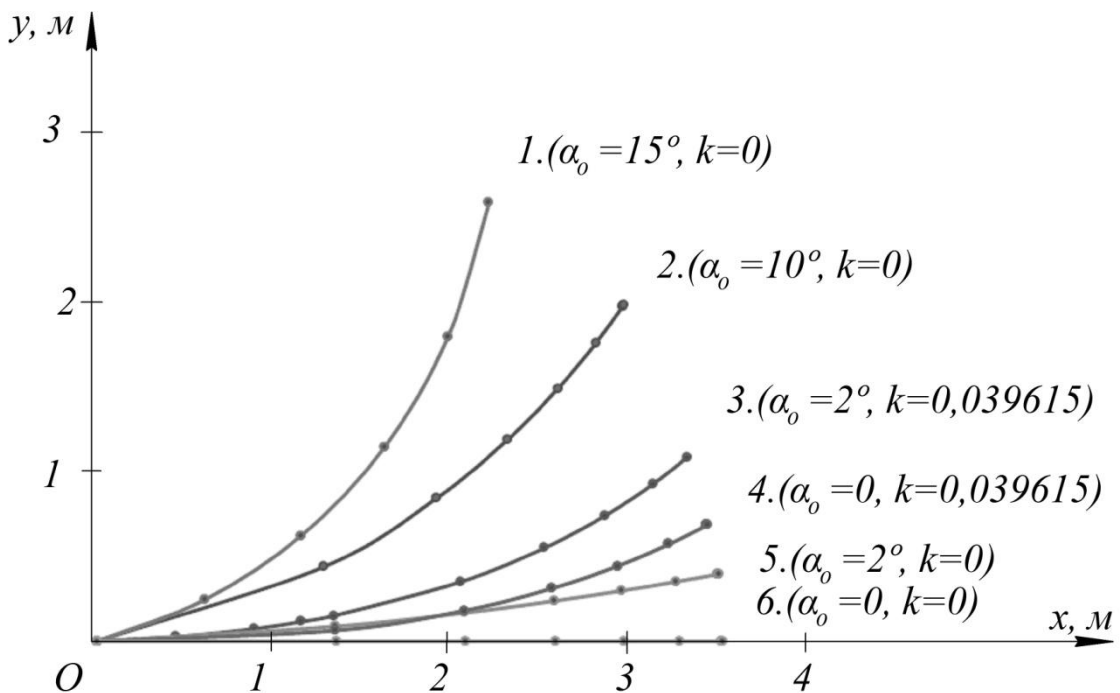
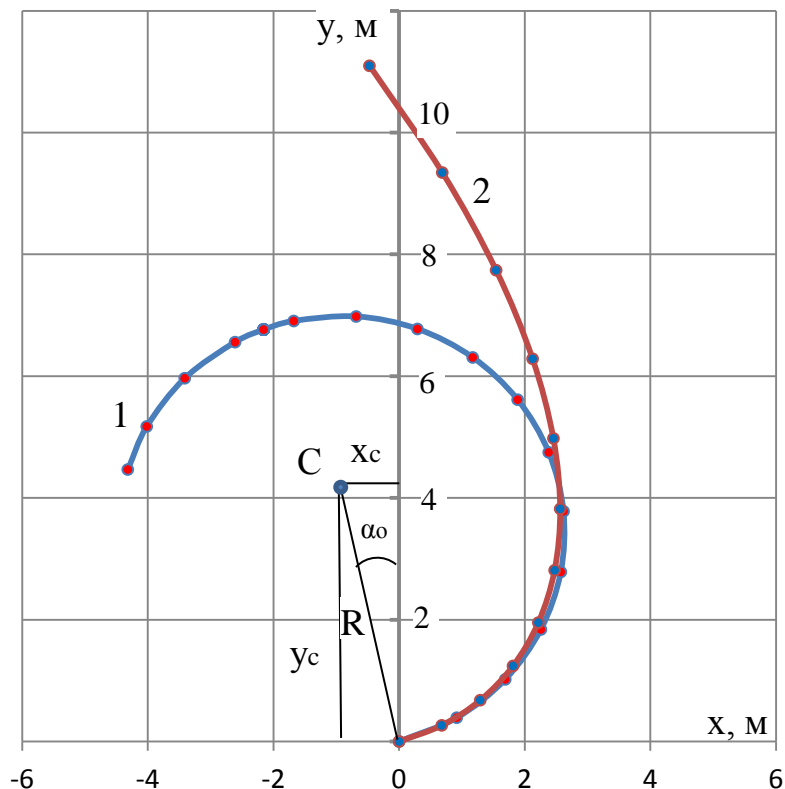


Рисунок 4 - Траєкторії входу в лівий поворот, побудовані за рівняннями (6) при різних значеннях основних параметрів.

Як видно, рівняння (6) придатні для визначення всіх можливих маневрів колісної машини і при будь-яких значеннях вихідних параметрів. Єдине обмеження при використанні цих рівнянь обумовлене припущенням $\sin\alpha=\alpha$, яке допустиме наближено при $\alpha<30^\circ$, і яке впливає на траєкторію колового руху при значеннях курсового кута за означеною межею.

На рис. 5 побудовані дві траєкторії при $\alpha_0=15^\circ$ і $k=0$. Траєкторія 1 розрахована за рівняннями (10), отриманими в роботі [1] спеціально для колового руху колісної машини:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{\alpha_1} [\sin(\alpha_0 + \varphi) - \sin \alpha_0], \\ \acute{o} &= -\frac{1}{\alpha_1} [\tilde{n}\cos(\alpha_0 + \varphi) - \cos \alpha_0].\end{aligned}\tag{10}$$



1 – за рівняннями (10); 2 – за рівняннями (6).

Рисунок 5 - Траєкторії колового руху.

Без урахування відведення коліс це ідеальне коло радіусом $R=3,55$ м ($\alpha_0=15^\circ$) з координатами центра $x_c=R\sin\alpha_0$; $y_c=R\cos\alpha_0$. Траєкторія 2 на рис. 5 побудована за рівняннями (6). Вона з достатньою точністю співпадає з кривою 1 в означених вище межах параметрів α і φ .

Висновки. Кожна з розглянутих форм параметричних рівнянь траєкторії неусталеного руху колісної машини удосконалює попередню форму, яку також не слід відкидати, тому що кожна з наведених форм має свої особливості. Рівняння (1), наприклад, надають можливість будувати траєкторії незалежно від швидкості руху, тобто побудована за цими рівняннями траєкторія при деяких значеннях α_0 і k вірна для будь-якої швидкості v , якщо привести у відповідність до неї час руху t згідно (8). Рівняння (4) описують неусталений рух у природньому вигляді - в

функції часу. А рівняння (6) найпростіші у використанні і теж дозволяють виразити всі параметри руху в функції часу. Як видно з розглянутого прикладу, всі рівняння дають однаковий результат (таблиці 1, 2, 3). Однак існує необхідність в удосконаленні отриманих рівнянь, щоб спростити об'єм обчислюваної роботи під час теоретичного аналізу і дослідження конкретних траєкторій, наприклад, розворотів машино-тракторних агрегатів на полі або при плануванні руху машин в специфічних умовах, особливо при необхідності забезпечити дистанційне або автоматичне керування.

Список використаної літератури.

1. Поддубный В. И. Математическая модель движения колесного трактора / В. И. Поддубный // Ползуновский альманах. – 2005. – №3. – С.73-76.
2. Позин Б. М. Кинематические соотношения при взаимодействии движителя с грунтом при повороте / Б. М. Позин, И. П. Трояновская // Вестник ЮурГУ. Серия «Машиностроение». – Челябинск: изд-во ЮурГУ, 2005. – Вып. 7. – №14 (54). – С. 93-96.
3. Смирнов Г. А. Теория движения колесных машин / Г. А. Смирнов. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.
4. Трояновская И. П. Развитие и анализ взглядов на силовое взаимодействие колеса с грунтом при повороте машины / И. П. Трояновская // Сб. научных трудов «Механика и процессы управления», Труды XXXVIII Уральского семинара. Т.1 / УрО РАН. – Екатеринбург, 2008. – С.230-237.
5. Трояновская И. П. Силовое взаимодействие гусеничного движителя с грунтом на повороте / И. П. Трояновская // Тракторы и с/х машины. – 2007. – №12. – С.19-20.
6. Мельник В. І. Аналітичний спосіб дослідження криволінійного руху чотирьохколісної машини (Analytical method of examining the curvilinear motion of a four-wheeled vehicle). В. І. Мельник, М. Я. Довжик, Б. Я. Татьяначенко, О. О. Соларьов, Ю. В. Сіренко // Східно-Європейський журнал передових технологій. Прикладна механіка. *Вип. 3, № 7 (87), (2017). С. 59-65.*
7. Татьяначенко Б. Я. Результаты аналитических исследований траектории криволинейного движения четырехколесных машин.// Б. Я. Татьяначенко, Ю. В. Сиренко // Техническое обеспечение инновационных технологий в сельском хозяйстве: сборник научных статей Международной научно-практической конференции (Минск, 22–24 ноября 2017 года) / редкол.: В. П. Чеботарев [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2017. – 324 - 327 с.

ТРИ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ КОЛЕСНЫХ МАШИН

Получены три вида уравнений в параметрической форме для траектории неустановившегося движения четырехколесной машины с передними управляемыми колесами в функции угла поворота корпуса машины и в функции времени, а также уравнения кругового движения. На базе этих уравнений проведены теоретические исследования всех возможных видов криволинейного движения: вход в левый или правый повороты, выход из поворотов и круговое движение обоих направлений. Разработан способ сопряжения отдельных

участков сложной траектории, которая имеет место во время разворота машинно-тракторного агрегата (МТА) на поле. Решены отдельные задачи, связанные с выходом машины на заданные координаты, определением центров кривизны. Результатами работы можно воспользоваться для планирования разворотов МТА при выполнении сельскохозяйственных работ или для автоматического управления агрегатами и машинами.

Ключевые слова: четырехколесная машина, траектория движения, уравнения движения, поворот, передние управляемые колеса, курсовой угол, угол поворота.

THREE EQUATIONS OF THE TRAJECTORY OF AN UNSTRUCTURED MOVEMENT OF WHEEL MACHINES

The three types of equations obtained in parametric form for the trajectory of unsteady motion of a four-wheeled car with front steerable wheels as a function of the angle of rotation of the machine body and in the function of time, as well as the equations of circular motion. On the basis of these equations, theoretical studies of all possible types of curvilinear motion are carried out: entrance to left or right turns, exit from turns and circular motion of both directions. The results of the work can be used to plan the turns of machine and tractor units for agricultural work or for automatic control of aggregates and machines.

Key words: four-wheeled car, trajectory, equations of motion, turn, front steerable wheels, heading angle, angle of rotation.