УДК 514.18

ЗАЛЕЖНІСТЬ ОПОРУ ПЕРЕМІЩЕННЯ ГНУЧКОЇ СМУГИ ПО ПОВЕРХНІ ВІД КРИВИНИ ЇЇ ОСІ

Воліна Т. М., к.т.н.*,
t.n.zaharova@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8610-2208
Пилипака С. Ф., д.т.н.,
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

При розгляді руху тіла по поверхні зазвичай його замінюють матеріальною частинкою. При цьому значно спрощується аналітичний опис руху, що дає можливість з певною ймовірністю прогнозувати вплив тих чи інших факторів на перебіг процесу. Частинки можуть створювати суцільне середовище, одним із яких може бути гнучка смуга. При русі по поверхні вона деформується, набуваючи її форми. Такий рух може мати місце при оранці ґрунту, пронизаного корінням. В такому випадку скибу можна прийняти за смугу прямолінійного перерізу, довжина якої в процесі деформації не змінюється, тобто вона є нестискуваною. У статті розглянуто рух такої смуги по циліндричній поверхні з горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних. Смуга може вступати на поверхню перпендикулярно до твірних і в такому напрямі рухатися далі. У такому випадку траєкторія буде плоскою кривою – фактично перерізом циліндра. У статті розглянуто варіант, коли смуга вступає на поверхню циліндра під певним кутом до твірних. У такому випадку траєкторія руху смуги буде просторовою кривою. Для подолання опору ковзання смуги потрібно певне зусилля. Воно є сумою певних складових: зусилля на підйом смуги, на подолання тертя, на її деформацію у випадку пружної смуги.

У статті розглянуто зусилля, на величину яких впливає кривина траєкторії руху смуги, за яку прийнято її вісь. Зусилля визначається сумуванням елементарних сил, що діють на елементи смуги вздовж її осі. При цьому вважається, що при деформації смуги профіль її поперечного перерізу не змінюється і залишається прямокутним. На основі цього прямокутника утворюється елементарний паралелепіпед смуги, одним із розмірів якого є диференціал дуги її осі. Таким чином, визначення зусилля зводиться до інтегрування прикладених до елементарного паралелепіпеда сил по довжині дуги осі смуги. Однією із таких сил є відцентрова сила, яка залежить від кривини траєкторії, по якій рухається смуга по поверхні. Складова цієї сили спричинює тиск елемента смуги на поверхню, що

* Науковий консультант – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

викликає появу сили тертя. Якщо смуга пружна, то виникають зусилля деформації, які теж залежать від кривини осі смуги.

Ключові слова: гнучка смуга, циліндрична поверхня, кривина осі, відцентрова сила, сила тертя.

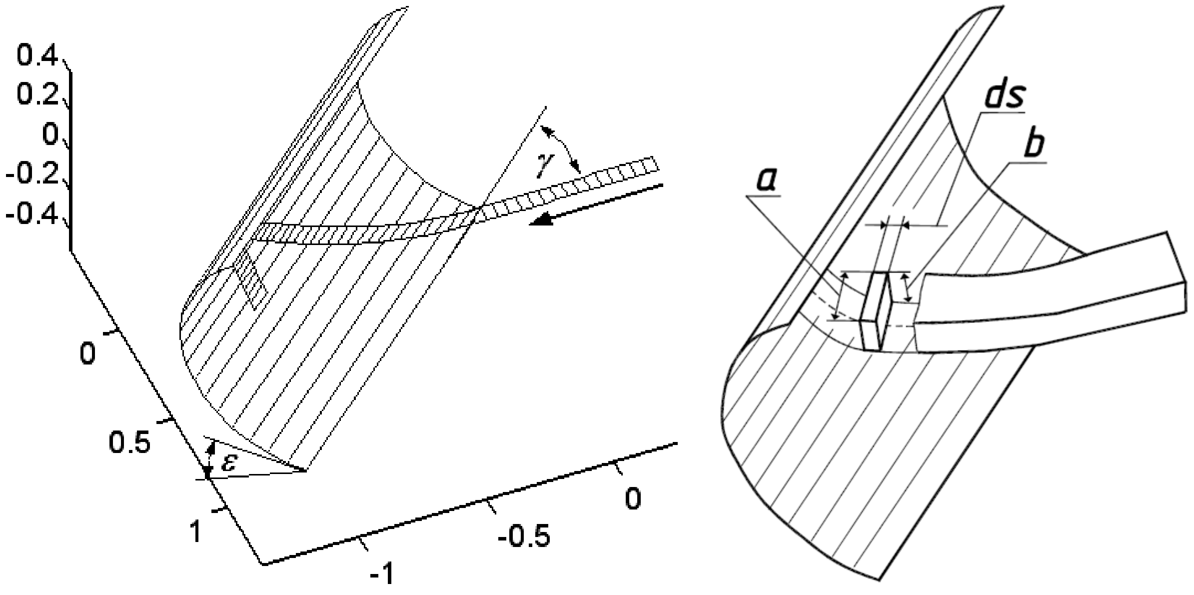
Постановка проблеми. Відомий вчений в області землеробської механіки академік В.П. Горячкін експериментальним шляхом визначав величину тягового зусилля, необхідного для оранки. Він вивів раціональну формулу сили тягового опору плуга, до якої входить три складових, одна із яких прямо пропорціональна квадрату швидкості відносного руху скиби по полиці, так звана динамічна складова. Проф. Л.В. Гячев детально розглянув сили, що виникають при взаємодії скиби із полицею, врахував розміри та питому вагу скиби, її пружність, швидкість оранки і ув’язав ці параметри із нормальною і геодезичною кривиною траєкторії. Звідси випливає, що кривина траєкторії руху скиби, яку приймають за смугу прямокутного перерізу, відіграє важливу роль. У статті розглянуто аналітичний підхід до з’ясування ролі кривини траєкторії, по якій рухається скиба.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Окрім праць вказаних вчених варто навести працю авторів [1], у якій розглянуто спрощений варіант руху смуги по плоскій траєкторії перпендикулярно прямолінійним твірним горизонтального циліндра.

Формулювання цілей статті. Метою статті є дослідження впливу просторової траєкторії руху смуги по циліндричних поверхнях на опір її переміщення.

Основна частина. Траєкторію руху смуги по внутрішній поверхні циліндра можна з деяким наближенням порівняти з рухом цупкої паперової стрічки, якщо її примусово подавати на нього в заданому напрямі під кутом γ (рис. 1,а). Така стрічка перетинатиме всі твірні циліндра під кутом γ і опише на ньому геодезичну лінію. Реальна траєкторія смуги відрізнятиметься від описаної, оскільки під дією сили ваги вона відхилятиметься від геодезичної вниз по циліндру.

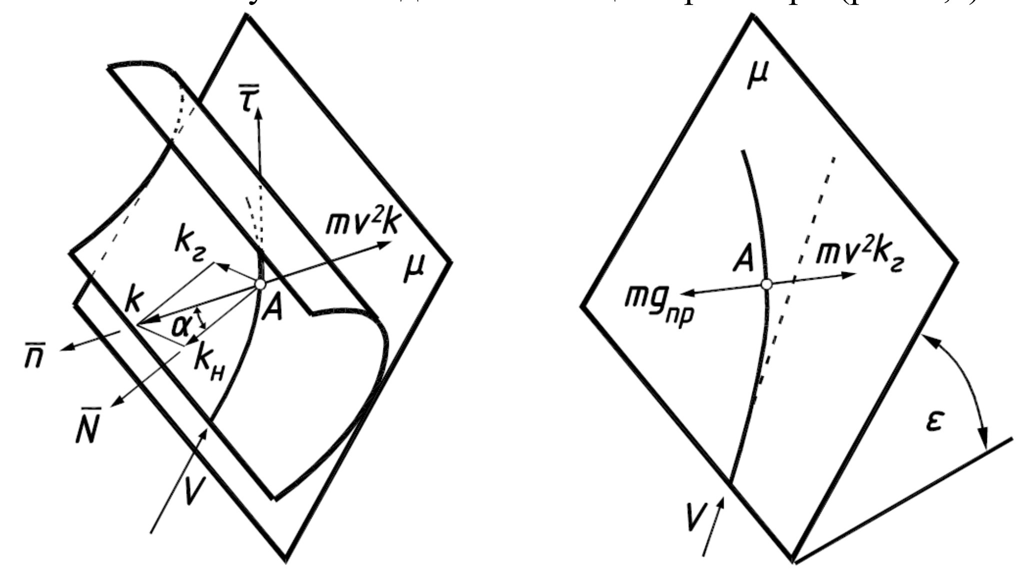
Будемо рухати смугу зі сталою швидкістю V по циліндру. У такому випадку прискорення вздовж дотичної до траєкторії дорівнює нулю, а вздовж головної нормалі виникне доцентрове прискорення. Воно визначається із виразу V^2k, де k – кривина траєкторії в точці знаходження елемента (нескінченно малого паралелепіпеда) смуги (рис. 1,б). Якщо крива (траєкторія руху частинки) розташована на поверхні, то частинка буде взаємодіяти із нею, тиснучи з певною силою F. Сила тиску, як і реакція поверхні, завжди спрямовані вздовж нормалі до поверхні $\bar{N}$, яка складає із головною нормаллю траєкторії $\bar{n}$ певний кут α (рис. 2,а) Її спричинюють складові ваги частинки, відцентрової сили, сили, що згинає смугу, якщо вона пружна, та інші, менш значимі. Якщо сила ваги не залежить від кривини траєкторії, то на останні дві складові кривина має суттєвий вплив.



а) б)

Рис. 1. До визначення напряму руху смуги по циліндричній поверхні: а) імітація руху смуги по внутрішній поверхні паперовою стрічкою, яка перетинає всі твірні поверхні під сталим кутом γ; б) геометричні розміри смуги та її нескінченно малий елемент у вигляді паралелепіпеда

Нехай елемент смуги знаходиться в точці *A* траєкторії (рис. 2,а).



а) б)

Рис. 2. Розкладання вектора кривини та сил, що діють на елемент смуги в точці *A* траєкторії його руху із швидкістю *V*: а) розкладання кривини в нормальній площині траєкторії на складові вздовж нормалі до поверхні і на дотичну площину; б) схема дії сил на елемент смуги в дотичній площині

Вектор кривини k спрямований по головній нормалі $\bar{n}$ траєкторії. Відцентрова сила $F_в=mV^2k$ спрямована в протилежну сторону. Її напрям не збігається із напрямом нормалі $\bar{N}$ до поверхні, тому вектор дії потрібно розкласти на складові вдовж нормалі до поверхні і на дотичну площину. Це рівносильно розкладанню кривини по цих же напрямах, причому складова $k_н$ на нормаль до поверхні носить назву нормальної кривини, а складова $k_г$ на дотичну площину – геодезичної кривини. Кут α між нормаллю до поверхні і головною нормаллю траєкторії, через який здійснюють розкладання, визначається засобами диференціальної геометрії і залежить від форми кривої на поверхні. У загальному випадку він є змінним і залежить від точки на кривій, так само, як і кривина, тобто $\alpha=\alpha(s)$ і $k=k(s)$, де s – довжина дуги кривої. Для геодезичної лінії кут α у всіх точках рівний нулю, тобто головна нормаль кривої збігається із нормаллю до поверхні.

Припустимо, що пружність смуги мала, тобто вона практично не чинить опору згинанню. Тоді на елемент скиби розміром $a \times b \times ds$ (рис. 1,б) діють дві сили: сила ваги $dP=(a \times b \times ds)\cdot\eta\cdot g=a\cdot b\cdot\eta\cdot g\cdot ds,$ де η – щільність ґрунту, g – прискорення вільного падіння і відцентрова сила $dF_в=mV^2k=a\cdot b\cdot\eta\cdot V^2k\cdot ds$. Обидві сили потрібно розкласти за напрямами, як показано на рис. 2,а. Складова відцентрової сили, що спроекційована на нормаль до поверхні, спричинює тиск елемента скиби на полицю. Її величину визначимо із виразу: $dF_{вн}=a\cdot b\cdot\eta\cdot V^2k_н\cdot ds$. Вона врівноважується реакцією полиці. Друга складова $dF_{вг}=a\cdot b\cdot\eta\cdot V^2k_г\cdot ds$, яка спроекційована на дотичну площину, врівноважується проекцією сили ваги елемента скиби $mg_{пр}=a\cdot b\cdot\eta\cdot g\cdot ds_{пр}$ (рис. 2,б). На рис. 2,б циліндричну поверхню показано умовно розігнутою на дотичну площину μ. Штриховою лінією показано слід середньої точки смуги, якби траєкторією її руху була геодезична лінія (на розгортці вона перетворюється у пряму). Це можливо було б при великій жорсткості смуги (на прикладі паперової стрічки). Однак смуга (особливо для окультурених ґрунтів) не чинить великого опору згинанню і складова ваги $mg_{пр}$ (рис. 2,б) відхиляє її в дотичній площині від прямолінійного напряму. Проте при збільшенні швидкості V руху смуги складова відцентрової сили $dF_{вг}=a\cdot b\cdot\eta\cdot V^2k_г\cdot ds$ зростає прямо пропорційно квадрату швидкості, тобто при незначному підвищенні швидкості складова відцентрової сили зростає суттєво. Оскільки величина складової сили ваги $mg_{пр}=a\cdot b\cdot\eta\cdot g\cdot ds_{пр}$, що її врівноважує, не залежить від швидкості, то наростаюча складова відцентрової сили намагається випрямити траєкторію руху елемента смуги, наближаючи її до геодезичної лінії. При нескінченному зростанні швидкості траєкторією руху смуги буде геодезична лінія. Таким чином, геодезичну лінію можна вважати за граничну траєкторію руху смуги, яка може бути для неї реальною у випадку великої швидкості її руху або абсолютно пружної смуги.

Розглянемо дію сил, коли смуга пружна і чинить певний опір її згинанню. Смуга згинається у двох напрямах: в дотичній і нормальній площинах траєкторії. У цих площинах її опір згинанню буде різний і залежатиме від жорсткості смуги. Жорсткість залежить від геометричних розмірів перерізу смуги і визначається добутком модуля пружності E на момент інерції I перерізу смуги. Для нормальної і дотичної площин жорсткість відповідно запишеться $EI_н=Eab^3/12$ і $EI_г=Ea^3b/12$. Оскільки $a>b$, то жорсткість і, відповідно, опір згинанню смуги більший у дотичній площині, ніж у нормальній. Отже, ще одним чинником, що наближає траєкторію руху до геодезичної лінії полиці, є збільшення ширини смуги порівняно із її висотою.

Для знаходження сил, необхідних для згинання смуги в обох площинах, скористаємося відомим положенням теорії опору матеріалів, згідно якого кривина k пружної осі стержня (в нашому випадку смуги) прямо пропорційна прикладеному моменту M і обернено пропорційна жорсткості стержня EI, тобто $k=M/EI$. Знайшовши момент M і продиференціювавши його по довжині пружної осі (в нашому випадку по довжині траєкторії s), отримаємо силу, яка згинає смугу. Ще одне диференціювання дасть розподілену силу на одиницю довжини траєкторії. Отже, сила для згинання смуги $F_з$ по її довжині в межах полиці визначиться із формул:

- в нормальній площині: $$F_{зн}=\frac{dM_н}{ds}=E\frac{ab^3}{12}\frac{dk_н}{ds}; \qquad (1)$$

- в дотичній площині: $$F_{зг}=\frac{dM_г}{ds}=E\frac{a^3b}{12}\frac{dk_г}{ds}. \qquad (2)$$

Скиба тисне на полицю із силою (1), викликаючи силу тертя $fF_{зн}$, де f – коефіцієнт тертя скиби по полиці. Однак вона залежить від пружності смуги і може бути відсутня у випадку, коли скиба не чинить опору згинанню. Натомість нормальна складова відцентрової сили присутня завжди і не залежить від матеріалу смуги (мається на увазі, що його щільність стала). Оскільки елементарна сила, з якою тисне елемент смуги на полицю, визначається із виразу $dF_{вн}= a\cdot b\cdot\eta\cdot V^2k_н\cdot ds$, то для знаходження сумарної сили потрібно цей вираз проінтегрувати по довжині дуги s траєкторії. Приймаючи розміри перерізу смуги, швидкість її руху V і щільність матеріалу сталими, сила $F_{вн}$ визначиться із виразу:

$$F_{вн}=ab\eta V^2\int k_н ds. \qquad (3)$$

Силу $F_{зн}$ визначимо інтегруванням виразу (1):

$$F_{зн}=E\frac{ab^3}{12}\int k_н' ds. \qquad (4)$$

Сили (3) і (4) діють в напрямі нормалі до поверхні, тобто тиснуть на неї і спричинюють силу тертя. Вона залежить від нормальної кривини траєкторії руху смуги.

Висновки. Опір переміщенню смуги по поверхні спричинюють сили, однією із яких є сила тертя. Складовими сили тертя є відцентрова сила і сила, що деформує пружну смугу. Обидві ці сили залежать від нормальної кривини траєкторії руху смуги по поверхні. При збільшенні швидкості руху смуги або збільшенні її пружності траєкторія руху смуги наближається до геодезичної лінії. У такому випадку сила опору залежатиме від інтегралів (3) і (4), у яких нормальна кривина буде просто кривиною, оскільки геодезична складова кривини для геодезичної лінії дорівнює нулю.

Література

1. Pylypaka S., Zaharova T., Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. Determination of the effort for flexible strip pushing on the surface of a horizontal cylinder. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2020. P. 582 – 590.

ЗАВИСИМОСТЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ГИБКОЙ ПОЛОСЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ОТ КРИВИЗНЫ ЕЕ ОСИ

Волина Т.Н., Пилипака С.Ф.

При рассмотрении движения тела по поверхности обычно его заменяют материальной частичкой. При этом значительно упрощается аналитическое описание движения, что позволяет с определенной вероятностью прогнозировать влияние тех или иных факторов на ход процесса. Частицы могут создавать сплошную среду, одной из которых может быть гибкая полоса. При движении по поверхности она деформируется, приобретая ее формы. Такое движение может иметь место при вспашке почвы, пронизанной корнями. В таком случае ломоть почвы можно принять за полосу прямолинейного сечения, длина которой в процессе деформации не меняется, то есть она является несжимаемой. В статье рассмотрено движение такой полосы по цилиндрической поверхности с горизонтальным расположением прямолинейных образующих. Полоса может поступать на поверхность перпендикулярно образующим и в таком направлении двигаться дальше. В таком случае траектория будет плоской кривой – фактически сечением цилиндра. В статье рассмотрен вариант, когда полоса поступает на поверхность цилиндра под определенным углом к образующим. В таком случае траектория движения полосы будет пространственной кривой. Для преодоления сопротивления скольжения полосы нужно определенное усилие. Оно представляет собой сумму определенных составляющих: усилия на подъем полосы, на преодоление трения, на ее деформацию в *случае упругой полосы.*

В статье рассмотрены усилия, на величину которых влияет кривизна траектории движения полосы, за которую принято ее ось. Усилия определяется суммированием элементарных сил, действующих на элементы полосы вдоль ее оси. При этом считается, что при деформации полосы профиль ее поперечного сечения не меняется и остается прямоугольным. На основе этого прямоугольника образуется элементарный параллелепипед полосы, одним из размеров которого является дифференциал дуги ее оси. Таким образом, определение усилия сводится к интегрированию приложенных к элементарному параллелепипеду сил по длине дуги оси полосы. Одной из таких сил является центробежная сила, которая зависит от кривизны траектории, по которой движется полоса по поверхности. Составляющая этой силы вызывает давление элемента полосы на поверхность вызывает появление силы трения. Если полоса упругая, то возникают усилия деформации, которые тоже зависят от кривизны оси полосы.

Ключевые слова: гибкая полоса, цилиндрическая поверхность, кривизна оси, центробежная сила, сила трения.

DEPENDENCE OF RESISTANCE OF MOVEMENT OF THE FLEXIBLE STRIP ON THE SURFACE FROM THE CURVATURE OF ITS AXIS

Tatiana Volina, Serhii Pylypaka

During considering the movement of the body on the surface, it is usually replaced by a material particle. It greatly simplifies the analytical description of the movement, which makes it possible with some probability to predict the impact of certain factors on the process. The particles can create a continuous environment, one of which may be a flexible strip. It is deformed during moving on the surface, acquiring its shape. This movement can occur during plowing the soil, permeated with roots. In this case, the slice can be taken as a strip of the rectilinear cross-section, the length of which does not change during deformation, i.e. it is incompressible. The article considers the movement of such a strip on a cylindrical surface with a horizontal arrangement of rectilinear generatrices. The strip can enter the surface perpendicularly to the generatrices and moves farther in this direction. In this case, the trajectory will be a flat curve – in fact, a cross-section of the cylinder. The article considers the variant when the strip enters the surface of the cylinder at a certain angle to the generatrices. In this case, the trajectory of the strip movement will be a spatial curve. Some effort is required to overcome the slip resistance of the strip. It is *the sum of certain components: the effort to lift the strip, to overcome the friction, to its deformation in the case of an elastic strip.*

The article considers the forces, the magnitude of which is influenced by the curvature of the trajectory of the strip, for which its axis is taken. The force is determined by the summation of the elementary forces acting on the elements of the strip along its axis. It is considered that at the deformation of a strip the profile of its cross-section does not change and remains rectangular. On the basis of this rectangle, an elementary parallelepiped of a strip is formed, one of the dimensions of which is the differential of the arc of its axis. Thus, the definition of the force is reduced to the integration of the forces applied to the elementary parallelepiped along the length of the arc of the axis of the strip. One of such forces is the centrifugal force, which depends on the curvature of the trajectory along which the strip moves on the surface. The component of this force causes the pressure of the strip element on the surface, which causes the appearance of friction. If the strip is elastic, then there are deformation forces, which also depend on the curvature of the axis of the strip.

Keywords: flexible strip, cylindrical surface, axis curvature, centrifugal force, friction force.

References

1. Pylypaka S., Zaharova T., Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. (2020) Determination of the effort for flexible strip pushing on the surface of a horizontal cylinder. Lecture Notes in Mechanical Engineering, [in English]